Luboš Pick

Matematická analýza I

Přepsal Petr Baudiš

v ak. roce 2004/2005

“Když ji miluješ, není co řešit.”

Verze 1.61/L:1.616. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.
Aktuální verzi vždy najdete na `http://math.or.cz/`.
Sazba v programu TEX.

Úvod do matematické analýzy

Výroková logika

Definice:

Logika: věda o správnosti výroků.
Výrok: tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo ne. Obvykle ve formě “premisa ⇒ důsledek”. Tarskiho definice: “Výrok A je pravdivý, jestliže A.”

Příklad:

$$\begin{aligned}(A \Rightarrow B) &\Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\\ &\Longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)\end{aligned}$$

Výroková funkce: výraz, z nějž obdržíme výrok po dosazení prvků za proměnné. Zapisujeme $V(x_1, \dots, x_n)$, $x_n \in M_n$.
Kvantifikátory: všeobecný ($\forall$) a existenční ($\exists$). Platí **princip stejnoměrnosti**:

$$\forall x\ \exists y : V(x,y) \Longleftarrow \exists y\ \forall x : V(x,y)$$

Základní metody důkazů

Používáme zejména důkazy sporem, indukcí, přímo a nepřímo. Je záhodno se vyhnout důkazu kruhem.
Při dokazování je vhodné si uvědomit formální definici dokazovaného výroku a aplikovat ji na náš konkrétní případ (např. dokazujeme-li existenci limity, může pomoci vyjít z dosazení do její definice).
Tvrzení: Pro $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ liché $\Rightarrow n$ liché. **Důkazy:**

(i) Přímo:

$$n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2 \ \textit{(prvočíselný rozklad)}$$

$$n = p_1 \cdots p_k$$

$$j = 1, \dots, k : p_j \neq 2 \Rightarrow n \text{ liché}$$

(ii) Nepřímo:

$$n \text{ sudé } \Rightarrow n = 2m \Rightarrow n^2 = 4m^2 \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$$

(iii) Sporem:

$$n^2 \text{ liché } \wedge n \text{ sudé}$$

$$\Longrightarrow n^2 + n \text{ liché } \Longrightarrow n(n+1) \text{ liché}$$

$\not\sharp$ *Spor*

(iv) Indukcí:
$n = 1$: 1^2 liché, 1 liché.
$n \Rightarrow n+2$: n^2 liché $\Rightarrow (n+2)^2$ liché (neboť $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = 2n + 5$ je liché).
Q.E.D.

Další příklady:

- **Přímo:** $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$
  Cauchyho nerovnost:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$$

(1) $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, tedy platí.

(2) $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \neq 0$.
Trik: Definujme si:

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

Pak platí:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\alpha > 0,\ f(x) > 0 \overset{\text{z grafu}}{\Longrightarrow} D \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Longrightarrow \beta^2 \leq 4\alpha\gamma = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Q.E.D.

- **Sporem:** Předpokládáme opak a dokážeme jeho neplatnost.
  Iracionalita $\sqrt{2}$:

$$x > 0 : x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

Nechť $x = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná:

$$x^2 = 2 \Longrightarrow p^2/q^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$$

$$p^2 = 4m \Longrightarrow q^2 = 2m$$

To je ale spor s nesoudělností p, q.
Q.E.D.

- **Indukcí:** Dokazujeme, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. Stačí dokázat:

(i) $V(1)$

(ii) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

Bernoulliho nerovnost:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$$

(1) $n = 1$:
$1 + x \geq 1 + x$

(2) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$:
$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

Q.E.D.

A-G nerovnost:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_1,a_2,\ldots,a_n > 0$$

$V(1)$ je triviální.
$V(2)$: $(a_1+a_2)/2 \geq \sqrt[2]{a_1a_2}$. Nechť $a = A^2$ a $b = B^2$:

$$(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB \geq 0$$

$V(n) \Rightarrow V(2n)$:

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{2n} =$$
$$= \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n} \geq$$
$$\overset{V(2)}{\geq} \sqrt[2]{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{a_{n+1}+\cdots+a_{2n}}{n}} \geq$$
$$\overset{V(n)}{\geq} \sqrt[2]{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}\cdots a_{2n}}} =$$
$$= \sqrt[2n]{a_1\cdots a_{2n}} \Longrightarrow V(2n)$$

$V(n+1) \Rightarrow V(n)$: Mějme $a_1,\ldots,a_n$.
Trik: Definujme:

$$b_1 := \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$$
$$b_2 := \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$$
$$b_n := \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$$
$$b_{n+1} := 1$$

$$V(n+1) \Longrightarrow \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{b_1b_2\cdots b_{n+1}} = 1$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_{n+1} \geq n+1$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}} \geq n$$
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \Longrightarrow V(n)$$

Q.E.D.

Množina reálných čísel

Definice:

Množina A je **induktivní**, jestliže:

(i) $1 \in A$

(ii) $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$

$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=}$ průnik všech induktivních množin (nebo také $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$).
$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$
$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{p/q : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ za okamžik.
$\mathbb{C}$ se zabývat nebudeme.

VĚTA 1 (o reálném tělese):

Existuje právě jedno uspořádané těleso $\mathbb{R}$, na němž jsou dány operace "+" a "·", prvky "0" a "1" a binární relace "$\geq$" s následujícími vlastnostmi:

I. Algebraické vlastnosti tělesa:

(i) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (asociativita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(ii) $x+y = y+x$ (komutativita) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $x+0 = 0+x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $x+(-x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} : \exists -x \in \mathbb{R}$

(v) $(xy)z = x(yz)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(vi) $xy = yx$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $1x = x1 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(viii) $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$

(ix) $x(y+z) = xy + xz$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

II. Axiomy uspořádání:

(i) $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ (slabá antisymetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (tranzitivita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(iii) $x \leq y \vee y \leq z$ (dichotomie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(v) $xy \geq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0$

Axiom o supremu

Nechť $M \in \mathbb{R}$. Řekneme, že M je:

(i) **shora omezená**, jestliže $\exists\, K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \leq K$.

(ii) **zdola omezená**, jestliže $\exists\, K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \geq K$.

(iii) **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

K pak nazýváme **horní (dolní) závorou množiny** M.

Supremum

Nechť M je neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak $\exists!\, G \in \mathbb{R}$, pro které platí:

(i) $\forall x \in M : x \leq G$ (horní závora)

(ii) $\forall G' < G \;\exists\, x \in M : G' \leq x$ (nejmenší horní závora)

(pro uzavřený interval $G \in M$, pro otevřený interval však **nikoliv**.

$$G = \sup M$$

Infimum

Nechť M je neprázdná a zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak $\exists!\, g \in \mathbb{R}$, pro které platí:

(i) $\forall x \in M : x \geq g$ (dolní závora)

(ii) $\forall g' > g \;\exists\, x \in M : g' \geq x$ (nejmenší dolní závora)

$$g = \inf M$$

DŮKAZ:

Definujme množinu $-M := \{-x, x \in M\}$. Pak $-M$ je shora omezená (neboť M je zdola omezená). Tedy $\exists\, G = \sup(-M)$ (supremum máme zavedeno axiomaticky).

$$G \geq -x \Rightarrow -G \leq x \Rightarrow g \leq x \qquad \forall x \in M$$

Pak ovšem $g := -G = \inf(M)$.

Příklady:

$$\begin{array}{rll} (0,2) & \inf M = 0 \notin M & \sup M = 2 \notin M \\ [0,2] & \inf M = 0 \in M & \sup M = 2 \in M \\ \{n \in \mathbb{N} : x = 2 - 1/n\} & \inf M = 1 \in M & \sup M = 2 \notin M \\ (0,2) \cup \{3\} & \inf M = 0 \notin M & \sup M = 3 \in M \end{array}$$

VĚTA 2 (Archimédova vlastnost):

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\exists\, n \in \mathbb{N} : x < n$$

DŮKAZ:

Sporem: předpokládejme, že $\exists\, x \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$. Pak je $\mathbb{N}$ shora omezená, tedy $\exists\, G = \sup \mathbb{N}$.

Přitom pro $\mathbb{N}$ platí: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ (jde o průnik všech induktivních množin). Tedy $n + 1 \leq G$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, tudíž $n \leq G - 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Ovšem v tom případě $\sup \mathbb{N} = G - 1$!

$\not\sharp$ *Spor*

Spočetnost: Množina A je spočetná, existuje-li zobrazení $f\colon \mathbb{N} \xleftrightarrow{1\text{–}1} A$.

VĚTA 3 (hustota racionálních a iracionálních čísel v reálných číslech):

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$: Kardinálně $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, můžeme zobrazit všechna racionální čísla na $\mathbb{N}$ (matice, řádky budou p a sloupce q, číslujeme diagonálně).

Pro každá $a, b \in \mathbb{R}, a < b \;\exists\, q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$, $a < r < b$ (ať uděláme sebeužší mezírku na reálné ose, vejde se nám tam nějaké racionální a iracionální číslo).

DŮKAZ:

Přímo:

($\mathbb{Q}$) $q = m/n$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
Z Archimeda $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/(b-a) < n$, tedy $b-a > 1/n$. Pak ale jistě existuje $m \in \mathbb{Z}$ tak, že $m/n \in (a,b)$.

($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a < q_1 < q_2 < b$.
Zvolme $r = q_1 + 1/\sqrt{2}(q_2 - q_1)$. Pak:

- **(i)** $r \in (q_1, q_2) \subset (a,b)$, neboť $1/\sqrt{2} < 1$.
- **(ii)** $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\langle$cvičení$\rangle$).

VĚTA 4 (o existenci n-té odmocniny):

(Tato věta je těžká!)

$$\forall x > 0, x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \exists\, y > 0, y \in \mathbb{R}, \quad y^n = x$$

DŮKAZ:

Nejdříve si označme:

$$R_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$R^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Definujme si nějaké pomocné množiny:

$$M_1 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \leq x\}$$

$$M_2 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \geq x\}$$

LEMMA 1:

$$R^+ = M_1 \cup M_2$$

DŮKAZ:

Zřejmě $M_1 \subseteq \mathbb{R}^+, M_2 \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow M_1 \cup M_2 \subseteq \mathbb{R}^+$.
Kdyby $\mathbb{R}^+ \neq (M_1 \cup M_2)$, pakk $\exists\, k, k \neq (M_1 \cup M_2)$, tedy $k^n \not\leq x$ ani $k^n \not\geq x$, což je ve sporu s dichotomií.
$\nparallel$ *Spor*

Nyní si definujme $y_1 = \sup M_1$, $y_2 = \inf M_2$.

LEMMA 2:

$$y_1^n \leq x \wedge x \leq y_2^n$$

DŮKAZ:

Dokažme $y_1^n \leq x$ sporem: $y_1^n > x$.
Pak by dle Archimeda $\exists\, h > 0$, $h > \dfrac{ny_1^n}{y_1^n - x}$ (trik). Tedy:

$$k \in M_1 \Rightarrow k^n \leq x \Rightarrow -x \leq -k^n$$

$$y_1^n - x \leq y_1^n - k^n$$

Z binomické věty:

$$y_1^n - k^n = (y_1 - k)\underbrace{(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}k + \cdots + y_1 k^{n-2} + k^{n-1})}_{n \text{ členů, všechny } \leq y_1^{n-1}} \leq (y_1 - k)ny_1^{n-1}$$

Z (ii) vl. suprema $\exists\, k \in M_1 : k > y_1 - 1/h$, tedy:

$$(y_1 - k)ny_1^{n-1} < \frac{ny_1^{n-1}}{h} < ny_1^{n-1}\frac{y_1^n - x}{ny_1^{n-1}} = y_1^n - x$$

$$y_1^n - x < y_1^n - x$$

$\lightning$ *Spor*
Analogicky $x \leq y_2^n$.

Nyní konečně můžeme dokázat $y_1 = y_2$. Víme, že nejde, aby $y_2 < y_1$ (jinak $y_1^n > y_2^n$), tedy stačí vyloučit $y_1 < y_2$. Kdyby to ovšem platilo, dle V.3- by $\exists\, q \in \mathbb{Q}, q \in (y_1, y_2)$, což je však spor s $\mathbb{R}^+ = M_1 \cup M_2$.

Q.E.D.

Posloupnosti

Definice:

Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$ přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, pak množinu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností reálných čísel**. a_n pak nazýváme n-tým členem posloupnosti.

Příklady:

(i) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$: 1, 2, 3, 4, 5, ...
(ii) $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$: 3, 5, 7, 9, 11, ...
(iii) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: 2, 4, 8, 16, 32, ...
(iv) $\{p_n : p_n = n\text{-té prvočíslo}\}_{n=1}^{\infty}$: 2, 3, 5, 7, 11, ...
(v) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$: 1, 1, 1, 1, 1, ...
(vi) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$: $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
(vii) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + a_n^2$: 1, 2, 5, 26, 677, ...

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, je-li omezená množina čísel $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- **neklesající**, pokud $a_{n+1} \geq a_n$ $\quad\forall n \in \mathbb{N}$
- **nerostoucí**, pokud $a_{n+1} \leq a_n$ $\quad\forall n \in \mathbb{N}$
- (ostře) **rostoucí**, pokud $a_{n+1} > a_n$ $\quad\forall n \in \mathbb{N}$
- (ostře) **klesající**, pokud $a_{n+1} < a_n$ $\quad\forall n \in \mathbb{N}$
- **monotónní**, je-li neklesající, nerostoucí, rostoucí či klesající.
- **ryze monotónní**, je-li rostoucí či klesající.

Příklady:

(i) $\{1/n\}$ je klesající.
(ii) $\{\log n\}$ je rostoucí.
(iii) $\{(-1)^n\}$ není monotónní.
(iv) $\{5326\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a nerostoucí.
(v) $\{(1+1/n)^n\}$ je rosstoucí (je třeba dokázat).

Vlastní limita posloupnosti

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu (je **konvergentní**) $A \in \mathbb{R}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu (je **divergentní**), jestliže:

$$\forall A \in \mathbb{R} \; \exists \varepsilon > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$$

Pozn.: Divergentní posloupností myslíme i posloupnost oscilující.

Příklady:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ není definovaná.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

DŮKAZ:

(i) $A = 0$, dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 > 1/\varepsilon$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

(ii) $A = 1$, mějme $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, kde $\delta_n > 0$ pro $\forall n \geq 2$.
Sporem: nechť $\lim \neq 1$:

$$\exists \varepsilon > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; \sqrt[n]{n} \geq 1 + \varepsilon$$

Pak musí existovat rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k \in \mathbb{N}$ a $a_{n_k} > 1 + \varepsilon$. Tedy:

$$\sqrt[n_k]{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$1 + \delta_{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$n_k = (1 + \delta_{n_k})^{n_k} > (1 + \varepsilon)^{n_k} = 1 + n_k\varepsilon + \binom{n_k}{2}\varepsilon^2 + \cdots$$

$$> n_k\varepsilon + \frac{n_k(n_k - 1)}{2}\varepsilon^2$$

$$\Longrightarrow 1 > \varepsilon + \frac{n_k - 1}{2}\varepsilon^2 \qquad \forall n_k$$

$$\Longrightarrow \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot 2 + 1 > n_k \qquad \forall n_k$$

$\not\sharp$ *Spor*

(iii) $\exists\, \varepsilon$ takové, že pro $\forall n_0\ \exists\, n : |a_n - A| \geq \varepsilon$ pro každé předem dané $A \in \mathbb{R}$.
Sporem: předpokládejme $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$, pak k $\varepsilon = 1/3$ existuje n_0 takové, že $|(-1)^n - A| < 1/3$ pro $\forall n > n_0$.

$$2 = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n - A + A - (-1)^{n+1}| \leq$$
$$\leq |(-1)^n - A| + |A - (-1)^{n+1}| < 1/3 + 1/3 = 2/3$$

$\not\!\!\not\ $ *Spor*

(iv) e si později nadefinujeme právě jako tuto limitu.

(v) Triviální.

VĚTA 1 (o jednoznačnosti limity posloupnosti):

Každá posloupnost má nejvýše jednou limitu.

DŮKAZ:

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2$, bez újmy na obecnosti (dichotomie) nechť $A_1 > A_2$.
Zvolme $\varepsilon < (A_1 - A_2)/2$. Pak $\exists\, n_1, n_2$ taková, že:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ pro } n \geq \max(n_1, n_2) \text{ platí zároveň obojí.}$$

$\not\!\!\not\ $ *Spor*

VĚTA 2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti):

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon = 1$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak dle definice $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |A| + 1$$

Zvol $K := \max\{|A| + 1; |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$. Pak pro $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.

Definice:

Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je **vybraná** z $\{a_n\}$, existuje-li *rostoucí* posloupnost

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$$

taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

VĚTA 3 (o limitě vybrané posloupnosti):

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{b_k\}$ je vybraná posloupnost z $\{a_n\}$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A$.

DŮKAZ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Longrightarrow \exists\, k_0 \geq n_0 : a_{n_{k_0}} = b_{k_0}$$
$$\forall l \geq l_0 : |b_l - A| < \varepsilon \ \textit{(neboť } b_l \textit{ je také nějaké } a_n\textit{)}$$

Q.E.D.

VĚTA 4 (o aritmetice limit):

Nechť $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \in \mathbb{R}$, pak platí:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -A$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/a_n) = 1/A$ (pokud $a_n \neq 0$ pro $\forall n$ a $A \neq 0$)

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

Tedy také $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha A$ a za dobrého počasí i $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = A/B$.

Pozor! Obecně neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n + \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, nemusí jedna z nich existovat.

DŮKAZ:

(i) Triviální, stačí volit $n_0' = n_0$ (jako pro původní posloupnost).

(ii) Pro dané $\varepsilon > 0$ platí limita $\{a_n\}$ od n_1, $\{b_n\}$ od n_2, tedy obě platí od $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ dále. Tedy:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon \qquad \forall n \geq n_3$$

(iii) Nejdříve dokážeme lemmu.

LEMMA:

$$\exists\, K > 0,\ \forall n : |a_n| \geq K$$

DŮKAZ:
Mějme $\varepsilon < |A|/2$:

$$\exists\, n_0, \forall n \geq n_0 : |a_n| \geq 2\varepsilon \Rightarrow K \geq 2\varepsilon$$

Pro $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\} : K < \min\{|a_n|\} \Rightarrow \exists\, K$.
Q.E.D.

Zvolíme ε-pás kolem nuly o velikosti $K = \varepsilon_0$ takový, že $|a_n \geq \varepsilon_0|$, tedy $|1/a_n| \leq 1/\varepsilon_0$.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A - a_n}{a_n A}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|a_n A|} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{KA}$$

(iv) Mějme $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$|(a_n b_n) - (AB)| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| =$$

$$= |a_n|\underbrace{|b_n - B|}_{<\varepsilon} + |B|\underbrace{|a_n - A|}_{<\varepsilon} < |a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon$$

Přitom $|a_n|$ je omezeno nějakou konstantou K a $|B|$ je konstantní rovnou, tedy:

$$|a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon \leq \underbrace{(K + |B|)}_{\text{konst.}}\varepsilon$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání limit):

Mějme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Pak:

(i) Pokud $A > B$, pak $\exists\, n_0$, od kterého $a_n > b_n$ pro $\forall \geq n_0$.

(ii) Pokud $\exists\, n_0$ takové, že $a_n \geq b_n$ pro $\forall \geq n_0$, pak $A \geq B$. (Pozor, neplatí $a_n > b_n \Rightarrow A > B$! Např. $a_n = 1/n$, $b_n = -1/n$.)

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}(A-B)$, pak pro n_1: $|a_n - A| < \varepsilon$, pro n_2: $|b_n - B| < \varepsilon$, pro $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ jsou tyto pásy již disjunktní:

$$a_n > A - \varepsilon > B + \varepsilon > b_n \qquad \forall n \geq n_3$$

Q.E.D.

VĚTA 6 (o dvou policajtech):

Nechť:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$$

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

DŮKAZ:

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2 : |b_n - A| < \varepsilon$$

Definujme $n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak jistě

$$A - \varepsilon \leq a_n \qquad \forall n > n_3$$

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A$$

Q.E.D.

Příklad:

Nechť $a > 0$. Pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

DŮKAZ:

$(a > 1)$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq a,\ \forall n \geq n_0 : a \leq n$.
Tedy $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ pro $\forall n \geq n_0$.

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$(a = 1)$ Triviální.

$(a < 1)$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$

$$1/a > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$$

(Jak bylo dokázáno.)

$$1 \neq 0 \wedge \sqrt[n]{1/n} \neq 0 \quad \forall n \overset{\text{V.4.}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} - 1/n = 1$$

Q.E.D.

VĚTA 7 (o součinu omezené a "nulové" posloupnosti):

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
Pozn.: Platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. (Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$.)

DŮKAZ:

Víme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq K$. Pak dle předpokladu a dvou policajtů:

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{|a_n b_n| = |a_n||b_n|}_{\to 0} \leq \underbrace{K|a_n|}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

Q.E.D.

Příklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$

Nevlastní limita posloupnosti

Pokud posloupnost diverguje nade všechny meze (tedy neosciluje), říkáme, že nabývá nevlastní limity $\pm\infty$. Nejdříve si však musíme rozšířit dosud zavedené pojmy o nekonečna.

Rozšířená reálná osa

T-O-D-O: obrázek s úhly
Na nekonečna jsou možné dva pohledy. My se přidržíme toho, který zavádí nekonečna dvě.
Definujeme $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nekonečna jsou pak zavedena takto:

- **Uspořádání:** $-\infty < a < +\infty$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
- **Sčítání:** $$\begin{aligned} a + \infty &= \infty & \forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} \\ -\infty - a &= -\infty & \forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} \end{aligned}$$
- **Násobení:** $$\begin{aligned} a > 0 &: a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \\ a < 0 &: a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \end{aligned} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*$$
- **Dělení:** $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$
- **Absolutní hodnota:** $|\pm\infty| = +\infty$
- **Nedefinované výrazy:** $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{x}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Rozšířené supremum a infimum

Pokud množina M není shora omezená, $\sup M = +\infty$.
Pokud množina M není zdola omezená, $\inf M = -\infty$.

$$\begin{aligned} \sup \emptyset &= -\infty \\ \inf \emptyset &= +\infty \end{aligned}$$

(Jediný případ, kdy inf > sup.)

Definice:

$\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, pokud:

$$\forall K > 0 \; \exists n_0, \; \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$$

T-O-D-O: Zde může něco chybět…

VĚTA ():

Monotónní posloupnost má limitu. Pokud je omezená, má dokonce vlastní limitu.

DŮKAZ:

Pro neklesající posloupnost platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, podobně pro nerostoucí. Dále viz rozšířená definice suprema a infima.

Q.E.D.

Věty o limitách pro nevlastní limity

- *V.1- (o jednoznačnosti limity)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.2- (omezená a konvergentní posloupnost)* nemá pro nevlastní limity smysl.
- *V.3- (limita vybrané posloupnosti)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.4- (aritmetika limit)* platí i pro nevlastní limity, ovšem pouze, je-li výraz vpravo definován. (Tuto podmínku tedy přidáme navíc.)
- *V.5- (limita a uspořádání)* platí i pro nevlastní limity.

Limesy

Mějme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definujme posloupnosti $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$b_k = \sup\{a_n : n \geq k,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$c_k = \inf\{a_n : n \geq k,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování:

$$c_k \leq a_k \leq b_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ je } \textbf{nerostoucí} \ \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} b_k$$

$$\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ je } \textbf{neklesající} \ \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} c_k$$

Limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} b_k & \lim b_k \in \mathbb{R} \\ +\infty & \{a_n\} \text{ je shora neomezená} \end{cases}$$

Limes inferior

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} c_k & \lim c_k \in \mathbb{R} \\ -\infty & \{a_n\} \text{ je zdola neomezená} \end{cases}$$

Příklad:

(i) $a_n = (-1)^n$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

(ii) $a_n = 1/n^2$, $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = 0$

Poznámky:

(i) Narozdíl od limity, která nemusí existovat, $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$ existují vždy.

(ii) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

VĚTA 10 (o vztahu limity, suprema a limes inferior):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

Víme: $\forall k \in \mathbb{N}:\ c_k \leq a_k \leq b_k$

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} b_k = A \in \mathbb{R}^* \overset{\text{2 policajti}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} a_k = A$$

"$\Rightarrow$"

(i) Nechť $A \in \mathbb{R}$:
Zvol $\varepsilon > 0$. Potom $\exists\, n_0$ takové, že $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq a_n \leq A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq A + \varepsilon$$

$$0 \leq b_n - c_n \leq 2\varepsilon \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

(ii) Nechť $A = +\infty$:
Pak $\{a_n\}$ je shora neomezená.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. Pak $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 :\ a_n > K$.

$$\inf_{n \geq n_0} \{a_n\} \geq K \Rightarrow c_{n_0} \geq K$$

Protože $\{c_k\}$ je neklesající, máme $\forall n \geq n_0 :\ c_n \geq K$.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

(iii) Nechť $A = -\infty$: analogicky.

Cvičení:

Dokažte:

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

VĚTA (Bolzano—Weieistrassova věta):

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ:

Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Pak definujme

$$A = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Platí, že $A \in \mathbb{R}$, neboť $\{a_n\}$ je omezená, tedy

$$b_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 \le c_n \le b_n \le b_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definujeme množinu:

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N} : a_j \in [A-1, A+1]\} \ne \emptyset$$

$$m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min M_1$$

(index prvního bodu v pásku $A-1, A+1$).
Nechť jsou definována $n_1, \dots, n_{k-1}$. Pak definujeme:

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N},\ j > n_{k-1} : a_j \in [A - 1/2^k, A + 1/2^k]\}$$

$$n_k \stackrel{\text{def}}{=} \min M_k$$

Takto definuji nekonečnou posloupnost indexů $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tím získávám vybranou posloupnost

$$d_k = a_{n_k} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Tvrdím, že $\lim_{k\to\infty} d_k = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, k_0$ takové, že

$$1/2^k < \varepsilon \qquad \forall k \ge k_0$$

Tedy $|d_k - A| < \varepsilon$ pro $k \ge k_0$, tedy

$$\lim_{k\to\infty} d_k = A$$

Q.E.D.

VĚTA (Bolzano—Cauchyova věta):

Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, právě když platí tzv. Bolzano—Cauchyova podmínka:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \ge n_0)$$

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|A - a_n| < \varepsilon/2$$

Tedy pro $\forall m, n \geq n_0$:

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

"$\Leftarrow$"

Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Speciálně pro $m = n_0$:

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$a_{n_0} - \varepsilon < \liminf a_n \leq \limsup a_n < a_{n_0} + \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{V.10-}}{\Rightarrow} \exists \lim a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$$

Q.E.D.

Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Mějme $m \in \mathbb{N}$, pak $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, pokud tato limita existuje. Limitu značíme $\sum_{n=i}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} A \in \mathbb{R} & \text{řada } \textbf{konverguje} \\ \pm\infty & \text{řada } \textbf{diverguje} \\ \text{neexistuje} & \text{diverguje či osciluje} \end{cases}$$

Příklady:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ neexistuje

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

$$s_{2n+2} = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow \lim s_m = 1 \Rightarrow \sum a_n = 1$$

(iii) $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(iv) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^4+3}}$ konverguje, součet nelze vyjádřit

(v) $\sum q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$

$$s_m = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q-1} & q \neq 1 \\ m & q = 1 \end{cases}$$

$$\lim s_m = \begin{cases} \infty & q \geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum q^{n-1} \text{ konverguje } \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\lim q^{n-1} = \lim a_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

VĚTA 1 (nutná podmínka konvergence řady):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pozorování

Pro geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(Implikace však neplatí pro všechny řady.)

DŮKAZ:

Nechť $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak $s \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$$

$$0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n \overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Q.E.D.

Varování

Implikaci nelze obrátit (tedy podmínka není postačující).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$

Příklad:

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$:

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

$$s_{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$\begin{aligned} s_{2m} - s_m &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \\ &\geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \\ &= m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$s_{2m} - s_m \geq \frac{1}{2} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Tedy neplatí Bolzano-Cauchyova podmínka:

$$\overset{\text{V2.12-}}{\geq} \lim_{n\to\infty} s_m = +\infty$$

Řady s nezápornými členy

Studujeme $\sum a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pozorování

Pro řady s nezápornými členy mohou nastat pouze dvě možnosti. $\sum a_n \in \mathbb{R}$ nebo $\sum a_n = +\infty$. To plyne z toho, že posloupnost $\{s_m\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, a tedy dle V2.9- $\exists \lim s_m = \sum a_n$.

VĚTA 2 (linearita konvergentních řad):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergují. Pak:

(i) $\sum (a_n + b_n)$ konverguje.

(ii) $\sum c_n$ konverguje $\iff \sum \alpha c_n$ konverguje pro $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \emptyset$.

Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$

VĚTA 3 (srovnávací kritérium):

Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak:

(i) $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

(ii) $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje.

Obě tvrzení říkají vpodstatě totéž. (a_n je “hodnější” řada, b_n “zlobivější”.)

DŮKAZ:

(i) $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\sigma_m = b_1 + \cdots + b_m$
Dále definujme $\sigma := \lim \sigma_m \in \mathbb{R}$.
Navíc víme, že $\{s_n\}$ je posloupnost neklesající.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n$$

$$\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma_n \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma \qquad (\in \mathbb{R})$$

Tedy je $\{s_n\}$ neklesající shora omezená posloupnost, tudíž $\sum a_n$ je dle V2.9- konvergentní.

(ii) $\iff$ (i)

Q.E.D.

VĚTA 4 (limitní srovnávací kritérium):

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť dále existuje $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A \in \mathbb{R}^*$. Pak:

(i) $A \in (0,\infty) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(ii) $A = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

(iii) $A = \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

DŮKAZ:

(i) Víme, že $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$\frac{1}{2}A \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A \qquad \textit{(jen šikovné epsilon)}$$

$$\frac{A}{2} b_n \leq a_n \leq 2Ab_n$$

"$\Rightarrow$": $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2} b_n$ konverguje $\overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

"$\Leftarrow$": $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 2Ab_n$ konverguje $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

(ii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists\, n_0$ takové, že $a_n/b_n < 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n < b_n$, V.3-.

(iii) Zvol $\varepsilon = 1$, pak $\exists\, n_0$ takové, že $a_n/b_n > 1$ pro $\forall n \geq n_0$, tedy $a_n > b_n$, V.3-.

Q.E.D.

Příklady:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{\sqrt{3+n+2n^8}} \overset{?}{\approx} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$

$$a_n = \frac{n^3+1}{\sqrt{3+n+2n^8}}, \text{ zvol } b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n}{\sqrt{3+n+2n^8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in (0,\infty)$$

Tedy dle (i) $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje. My ale víme, že $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$ diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \textit{(diverguje)}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{15}}{3^n}$ $a_n = \frac{n^{15}}{3^n}$, zvol $b_n = 1/2^n$
Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{15}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$$

indukcí, Bernoulli, … (⟨cvičení⟩)
Navíc víme, že:

$$\sum b_n \text{ konverguje } \quad \textit{(geometrická řada)} \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

VĚTA 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy:

(i) Nechť $\exists\, q \in (0,1)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(ii) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(iii) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.
(iv) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.
(v) Nechť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

(i) Položme $b_n = q^n$, pak $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$. Dále $\sum b_n$ konverguje (geometrická řada, $q < 1$) $\overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow}$ také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(ii) Označ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A < 1$. Zvol $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon < 1$.

$$\exists\, n_0,\ \forall n \geq n_0 :\ \sup\{\sqrt[n]{a_k}, k \geq n\} \leq A + \varepsilon$$

Tedy $\sqrt[n]{a_n} \leq A + \varepsilon$, $n \geq n_0$.
Označ $q \overset{\text{def}}{=} A + \varepsilon < 1$, tvrzení plyne z V.-1.
(iii) Plyne z V.-2: $\exists \lim \Rightarrow \lim = \limsup$.
(iv)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ vybraná posloupnost } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\quad \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$$

$$\Rightarrow a_{n_k} > 1\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{ neplatí nutná podmínka } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\{a_n\}$$

Jiný pohled na poslední krok

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} \ \ \textit{(neboť } a_n \geq 0\textit{)} \ \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

(v) Ihned plyne z V.-4.

Q.E.D.

VĚTA 6 (d'Alembertovo podílové kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy:

(i) $\exists\, q \in (0,1)$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ konverguje .

(ii) Nechť $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.

(iii) Nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak $\sum a_n$ konverguje.

(iv) Nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak $\sum a_n$ diverguje.

DŮKAZ:

(i)

$$a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}$$

$$a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + a_{n_0} \sum_{n=1}^{\infty} q^k}_{konverguje}$$

$$\stackrel{\text{V.3-}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ konverguje}$$

(ii) (i) $\Rightarrow$ (ii) ($\langle$cvičení$\rangle$)

(iii) (ii) $\Rightarrow$ (iii) ($\langle$cvičení$\rangle$)

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \exists\, n_0,\ \forall n \Rightarrow n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ je rostoucí od jistého indexu}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \stackrel{\text{V.1-}}{\Rightarrow} \sum a_n \text{ diverguje}$$

Q.E.D.

Poznámka o nebezpečích

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow$ nevíme nic.

Příklad:

$\sum \frac{1}{n}$ diverguje, $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, obě mají limitu 1.

(iii) Parametr $q < 1$ je důležitý!

Příklad:

$$\sqrt[n]{a_n} < 1 \not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \not\Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje} \qquad \forall n \geq n_0$$

(iv) Jestliže $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada divergovat nemusí.

Příklad:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ konverguje. Po zpřeházení také, ale limes superior už nesedí.

Příklad:

Vyšetřete, pro která $a \geq 0$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n^n}{n!}$.

Pozorování

(i) $a = 0$: $\sum a_n$ konverguje.

(ii) a moc velké: $\sum a_n$ diverguje.

(iii) $a = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.

Dle d'Alemberta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n n^n} = a \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ae$$

$$\Rightarrow a \in (0, 1/e) \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\Rightarrow a \in (1/e, \infty) \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{e} \Rightarrow \text{ nevíme nic}$$

Zbývající vyšetření

$$a = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}\right) \neq 0$$

$\langle$cvičení$\rangle$

VĚTA 7 (Cauchyovo kondenzační kritérium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$. Pak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje}$$

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$": Přímo:
Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje. Označ:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} \end{aligned}$$

Víme: $\lim\limits_{k\to\infty} t_k < \infty$
Potom k danému n $\exists\, k$: $n < 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ &\le a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n: \quad s_n \le \lim_{t\to\infty} t_k \Rightarrow \ s_n \text{ je omezená } \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

"$\Rightarrow$": Nepřímo:
Nechť $\sum 2^n a_{2^n}$ diverguje.
Víme: $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$
Potom k danému n $\exists\, k$: $n > 2^k$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\ge \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \ge \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Příklad:

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Z původních kritérií nevyplývá nic, neboť $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1$. Navíc víme, že řada konverguje pro $\alpha = 2$ a diverguje pro $\alpha = 1$. Pro $\alpha \le 0$ diverguje také. Pro $\alpha > 0$ je $\frac{1}{n^\alpha}$ klesající, tedy lze užít V.7-.

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } &\overset{\text{V.7-}}{\Longleftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}\right) \text{ konverguje} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \text{ konverguje} \\ &\Leftrightarrow \alpha > 1 \ \textit{(geometrická řada)} \end{aligned}$$

Závěr

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Příklad:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

DŮKAZ:

$$\sum \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left(2^n \frac{1}{2^n \log^{\alpha} 2^n} \right) \text{ konverguje } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log^{\alpha} 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

VĚTA 8 (Raabeovo kriterium):

Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

Příklad:

$$\sum a_n, \ a_n = \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \right)^2$$

$\langle$cvičení$\rangle$

Absolutní konvergence

Definice

Řekneme, že řada $\sum a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Poznámky:

(i) $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel $\Rightarrow$ $\{|a_n|\}$ je posloupnost nezáporných čísel.

(ii) $\sum a_n$ konverguje absolutně $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konverguje. (Neplatí obráceně!)

Příklad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

konverguje, ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

T-O-D-O: Tady toho dost chybí.

T-O-D-O: Neabsolutní konvergence. Zde toho dost chybí.

Funkce

Základní definice

(i) Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f\colon M \to R,\ M \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Říkáme, že f je na M

- **(1)** rostoucí: $\forall x, y \in M:\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- **(2)** klesající: $\forall x, y \in M:\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- **(3)** nerostoucí, neklesající (analogicky)

(iii) Říkáme, že f je na M

- **(1)** sudá:
  - **I.** $x \in M \Rightarrow\ -x \in M$
  - **II.** $f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in M$
- **(2)** lichá:
  - **I.** $x \in M \Rightarrow\ -x \in M$
  - **II.** $f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in M$
- **(3)** periodická (s periodou $p > 0$):
  - **I.** $x \in M \Rightarrow x \pm p \in M$
  - **II.** $f(x+p) = f(x-p) = f(x) \qquad \forall x \in M$

Okolí

$a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$:

- **(i)** $\mathcal{P}(a,\delta)$ — prstencové (redukované) okolí bodu: $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$
- **(ii)** $\mathcal{U}(a,\delta)$: $(a-\delta, a+\delta) = \mathcal{P}(a,\delta) \cup a$
- **(iii)** $\mathcal{P}^+(a,\delta)$: $(a, a+\delta)$
- **(iv)** $\mathcal{P}^-(a,\delta)$: $(a-\delta, a)$
- **(v)** $\mathcal{U}^+(a,\delta)$: $[a, a+\delta)$
- **(vi)** $\mathcal{U}^-(a,\delta)$: $(a-\delta, a]$

$$\mathcal{P}(+\infty,\delta) = (1/\delta, +\infty) = \mathcal{U}(+\infty,\delta)$$
$$\mathcal{P}(-\infty,\delta) = (-\infty, -1/\delta) = \mathcal{U}(-\infty,\delta)$$

Limita funkce

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

Značíme: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Poznámky:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak je funkce definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. V bodě a funkce f může a nemusí být definována. Je-li f definována v a, pak $f(a)$ nemá vliv na limitu $\lim_{x\to a} f(x)$.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, existuje nevlastní ($A = \pm\infty$) nebo existuje vlastní ($A \in \mathbb{R}$).

(iii) Limitu počítáme buď ve vlastním bodě ($a \in \mathbb{R}$) nebo v nevlastním bodě ($a = \pm\infty$).

Jiné (ekvivalentní) formulace:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

$a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \iff \forall K \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$$

Obecně: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subset \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

Definice:

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

(Zleva $\mathcal{P}^-$.)
Značíme $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = A$.

Pozorování:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A$$

Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$

Příklady:

(i)

$$f(x) = \sqrt{x}, \; x \in [0,\infty)$$

$$\lim_{x\to 25} f(x) = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0,\infty) - \{25\} \\ \pi^2/8 & x = 25 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 25} f(x) = 5$$

Důkaz z definice: Dáno $\varepsilon > 0$, chci $\delta > 0$ tak, aby

$$x \in (25-\delta, 25+\delta) - \{25\} \Rightarrow \sqrt{x} \in (5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$$

δ volím tak, aby $\sqrt{25+\delta} < 5+\varepsilon \wedge \sqrt{25-\delta} > 5-\varepsilon$

$$\Rightarrow \delta \overset{\text{volím}}{=} \min\{(5+\varepsilon)^2 - 25, 25 - (5-\varepsilon)^2\}$$

(ii) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$:
Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$. Dáno $\varepsilon \Rightarrow \delta$ libovolné.

(iii) $f(x) = \operatorname{sign} x$:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje (neboť $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$).

(iv) Dirichletova funkce $D(x) = \operatorname{bool}(x \in Q)$:
Nemá ani jednostrannou limitu v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$.

(v) Riemannova funkce:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x \in \mathbb{Q},\ x = p/q \end{cases}$$

(viz D1).

$$\lim_{x\to a} R(x) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

(Pro každé ε si najdu oblast, kde z něj nic nevyskočí, a to bude δ.)

Spojitost

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Příklad:

$R(x)$ je spojitá v $\forall x \notin \mathbb{Q}$.

VĚTA 1 (Heineova věta):

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ ($\mathcal{P}(a, \delta_0)$). Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující pro $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in D(f)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. (Viz D2)

DŮKAZ:

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**

Víme: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subset \mathcal{U}(A,\varepsilon)$
Nechť $\{x_n\}$ splňuje požadavky (ii), tj.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$$x_n \neq a \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Tedy k $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ x_n \in \mathcal{U}(a,\delta)$$

(neboť $\lim x_n = a$). Ale

$$x_n \neq a\ \forall n \Rightarrow \exists\, n_0,\ \forall n \geq n_0 :\ x_n \in \mathcal{P}(a,\delta)$$

Tedy

$$f(x_n) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**

Sporem: Předpokládáme, že neplatí (i), ale platí (ii).
Neplatí (i), tedy:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq A \iff \exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists\, x \in \mathcal{P}(a,\delta) :\ f(x) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zkonstruujeme x_n tak, že $x_n \in \mathcal{P}(a,1/n) \cap \mathcal{P}(a,\delta_0)$ a $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$. Toto lze udělat, stačí položit $\delta = 1/n$. To provedu pro $\forall n \in \mathbb{N}$.
Nyní máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě platí:

$$x_n \in D(f) \quad (x_n \in \mathcal{P}(a,\delta_0),\ \forall n \in \mathbb{N})$$

$$x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (x_n \in \mathcal{P}(a,1/n),\ \lim_{n\to\infty} 1/n = 0)$$

Ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, protože jsme si řekli $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$.
$\not\sharp$ *Spor*

VĚTA 2 (o jednoznačnosti limity funkce):

Funkce f má v každém bodě nanejvýše jednu limitu.

DŮKAZ:

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a} f(x) = B$.
Nechť $\{x_n\}$ splňuje $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow} \lim f(x_n) = A,\ \lim f(x_n) = B \Rightarrow A = B \overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \text{tvrzení věty.}$$

Q.E.D.

VĚTA 3 (o lokální omezenosti funkce s vlastní limitou):

Nechť f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ taková, že f je na $\mathcal{P}(a,\delta)$ omezená.

DŮKAZ:

Víme: Pro $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}(a,\delta)) \leq \mathcal{U}(a,\varepsilon)$.
Limita je vlastní, $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{U}(A,\varepsilon) : (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.
Zvol $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a,\delta)) \leq \mathcal{U}(A,1)$$

$$f(x) \in (A-1, A+1) \quad \forall x \in \mathcal{P}(A,\delta)$$

$$\Rightarrow f \text{ je omezená na } \mathcal{P}(a,\delta)$$

Q.E.D.

Poznámka:

VĚTA 4 (o aritmetice limit funkcí):

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak:

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$, je-li výraz vpravo definován.

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = AB$, je-li výraz vpravo definován.

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li výraz vpravo definován.

DŮKAZ:

(i)

Zvol posloupnost $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Potom dle Heine 1:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$$

$$\overset{\text{VOAL}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = A+B$$

a protože je posloupnost libovolná,

$$\overset{\text{Heine 2}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = A+B$$

(ii), (iii) analogicky.
Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání a funkčních policajtech):

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(a,\delta)$ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) > g(x)$.

(ii) Nechť pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a nechť existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} f(x)$. Potom $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

(iii) Nechť pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a nechť $\lim f(x) = \lim g(x)$. Potom existuje $\lim h(x)$ a $\lim f(x) = \lim h(x) = \lim g(x)$. ("Policajti.")

DŮKAZ:

(i) Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A > B$. Zvolím $\varepsilon > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon) = \emptyset$ (futrály se nepotkají). K tomuto ε existuje δ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon),\ g(\mathcal{P}(a,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) > g(x) \qquad \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$$

(ii) Skoro totéž.

(iii) Zvolím $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta_0 > 0$ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a,\delta_0)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon),\ g(\mathcal{P}(a,\delta_0)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \gamma = \min(\delta,\delta_0):\ h(\mathcal{P}(A,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = A$$

Q.E.D.

Poznámka:

Všechny věty v této části platí i pro jednostranné limity. Např. Heine:

$$\lim_{x\to a_+} f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \in \mathcal{P}(f) \\ x_n \in \mathcal{P}^+(a,\delta) & \text{pro nějaké } \delta > 0 \\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Příklady:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} xD(x) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ neexistuje (Heine).
Stačí zvolit posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to \inf$, $\lim f(x_n) = \lim \sin(x_n)$. Volíme $x_n = n\pi/2$. $x_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$. Limita neexistuje.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin(1/x)$
Zvolím $x_n = 2/(\pi n)$, použijeme Heineho větu.

Spojitá funkce

$a \in \mathbb{R}$, f je **spojitá** v a, právě když:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: \ f(\mathcal{U}(a,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(a),\varepsilon)$$

f je **spojitá zprava** v a, právě když výše uvedené platí pro $x \to a_+$ a $f(\mathcal{U}^+(a,\delta))$.
f je **spojitá zleva** v a, právě když výše uvedené platí pro $x \to a_-$ a $f(\mathcal{U}^-(a,\delta))$.

Důsledek VOALF:

Nechť f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou také spojité v $a \in \mathbb{R}$. A jestliže navíc $g(a) \neq 0$, pak také podíl f/g je spojitý v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad:

Neboť $\lim_{x\to a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, je každá funkce tvaru

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ax + a_0 \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Takovou funkci nazýváme **polynom**.

Složená funkce

$\sin(x^2)$ je funkce složená. Podobné jako skládání zobrazení:

$$x \overset{\mathrm{g}}{\mapsto} g(x) \overset{\mathrm{f}}{\mapsto} f(g(x)) \iff (f \circ g)$$

$(f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))$ — **složená funkce**. f nazýváme **vnější funkce**, g **vnitřní funkce**. Např.:

$$g(x) = x^2,\ f(y) = \sin(y) \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$$

Varování: Skládání zobrazení není komutativní! $(g \circ f)(y) = (\sin y)^2$
Nechť:

$$\lim_{x\to a} g(x) = A$$

$$\lim_{x\to A} f(y) = B \ \textit{(Pozor na } x \to A!\textit{)}$$

Platí pak, že $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = B$? Neplatí!

Příklad:

$$g(x) \equiv 0$$

$$f(x) \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) \equiv 1$$

$$\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 1$$

Ale:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(y) = 0$$

(blíží se k 0, ale nikdy tam nedorazí).
$\not\sharp$ *Spor*

Co děláme špatně?

(i) Vnitřní funkce je konstantní.

(ii) Vnější funkce je nespojitá v tomto bodě.

VĚTA 6 (o limitě složené funkce):

Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ (vnitřní funkce), $\lim_{y\to A} f(y) = B$ (vnější funkce); $a, A, B \in \mathbb{R}^*$. Nechť navíc platí jeden z předpokladů:

(P1) f je spojitá v bodě A.

(P2) $\exists\,\delta > 0$ taková, že $g(x) \neq A$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ (tedy se vnitřní funkce "vyhýbá" své limitě).

Potom platí: $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x) = B$.

DŮKAZ:

Poznámka:

Proč věta nelze dokázat bez předpokladů? Lžidůkaz:
Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ najdu $\psi > 0$ takové, že:

$$f(\mathcal{P}(A,\psi)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

K $\psi > 0$ $\exists\,\mu > 0$ takové, že:

$$g(\mathcal{P}(a,\mu)) \subseteq \mathcal{U}(A,\psi)$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} (f\circ g)(\mathcal{P}(A,\mu)) \subseteq f(\mathcal{U}(A,\psi))$$

Chci tak $\subset \mathcal{U}(B,\varepsilon)$, to ale nejde! Místo $f(\mathcal{U}(A,\psi))$ bychom v tom případě museli použít $f(\mathcal{P}(A,\psi))$.

Možné cesty z nouze:

(i) Už od začátku si vezmu $\mathcal{U}(A,\psi)$ — požaduji spojitost.

(ii) Nebo vnitřní funkci zakáži, aby nabývala své limity — dostanu $\mathcal{P}(A,\psi)$.

Tedy:

(P1) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists\,\psi > 0 : f(\mathcal{U}(A,\psi)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

($\mathcal{U}(A,\psi)$ místo $\mathcal{P}$ si mohu dovolit, neboť je f v bodě A spojitá, tj. $f(A) = B$.)

$$\exists\,\mu : g(\mathcal{P}(a,\mu)) \subseteq \mathcal{U}(A,\psi)$$

$$(f\circ g)(\mathcal{P}(a,\mu)) = f(g(\mathcal{P}(a,\mu))) \subseteq f(\mathcal{U}(A,\psi)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

(P2) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists\,\psi > 0 : f(\mathcal{P}(A,\psi)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

Neboť $g(x) \neq A$ pro $x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ a k ψ:

$$\exists\,\mu : g(\mathcal{P}(a,\mu)) \subseteq \mathcal{U}(A,\psi)$$

$$\gamma = \min(\delta,\mu) : g(\mathcal{P}(a,\gamma)) \subseteq \mathcal{P}(A,\psi)$$

$$f(g(\mathcal{P}(a,\mu))) \subseteq f(\mathcal{P}(A,\psi)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

Q.E.D.

Intervaly

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$. Pak **otevřeným intervalem** (a, b) nazýváme množinu všech $\{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$. **Uzavřený interval** $[a, b]$ je definován pro $a \leq b$ jako množina $\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.

VĚTA 7 (o limitě monotónní funkce):

Nechť funkce je monotónní na otevřeném intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$. Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ i $\lim_{x\to b_-} f(x)$.

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram
Nechť f je např. neklesající. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a definujeme množinu $M = f((a, b)) = \{f(x),\ x \in (a, b)\}$. Potom definujeme $A := \inf M$. Z (ii) vlastnosti infima:

$$\exists\, x_0,\ x_0 \in (a, b) : A \leq f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (a, x_0)$$

Tedy:

$$f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

Tudíž $f((a, x_0)) \subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ a stačí zvolit $\delta > 0$, aby $\mathcal{P}^+(a, \delta) \subseteq (a, x_0)$. Tedy

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = A$$

Analogicky další případy.
Q.E.D.

Spojité funkce na intervalu

Definice:

Je-li (a,b) interval, pak a nazýváme **počátečním bodem** intervalu, b pak **koncovým bodem** a $x \in (a,b)$ **vnitřními body** intervalu. Obdobně pro uzavřené a polouzavřené intervaly.

Definice:

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá zprava ve všech bodech intervalu kromě koncového a zároveň spojitá zleva ve všech bodech intervalu kromě počátečího.

VĚTA 8 (Darbouxova):

Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$ a $f(a) < f(b)$. Pak

$$\forall y \in (f(a), f(b))\ \exists x \in (a,b) :\ f(x) = y$$

(Neboli spojitá funkce nabývá na intervalu všech mezihodnot.)

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram
Definujeme množinu $M := \{x \in [a,b] : f(x) < y\}$. Je neprázdná ($a \in M$) a omezená ($M \subseteq [a,b]$).
Označ $x_0 = \sup M$. Tvrdíme, že $f(x_0) = y$. To nyní dokážeme sporem s vlastnostmi suprema. Předpokládejme:

$$f(x_0) < y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \notin \mathcal{U}(y,\varepsilon) \Rightarrow y \notin \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$$

Funkce je spojitá, tedy k ε $\exists \delta > 0$ taková, že

$$f(x) \notin \mathcal{U}(y,\varepsilon) \qquad \forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \cap [a,b]$$

($f(x_0)$ je "strašně" daleko od y a nevejde se do ε-okolí y) **T-O-D-O:** Diagram
Čili x_0 není supremem množiny M, neboť existují body $x > x_0$, což je spor s první vlastností suprema!
Nechť $f(x_0) > y$. To je ve sporu s druhou vlastností suprema. $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $y \notin \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$. K ε potom $\exists \delta > 0$ taková, že

$$\forall x \in \mathcal{U}(x_0,\varepsilon) : f(x) > y \Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$$

Pak ale x_0 nemůže být supremum, protože je před ním "díra" $x_0 - \delta$.
$\not\sharp$ *Spor*

VĚTA 9 (zobrazení intervalu spojitou funkcí):

(Nebo také "o spojitém obrazu intervalu".)
Nechť I je interval a nechť $f \colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $f(I)$ je interval. (Pozor, obrazem otevřeného intervalu je uzavřený interval.)

DŮKAZ:

LEMMA:

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a nechť platí

$$\forall x,y \in M,\ \forall z \in \mathbb{R} :\ x < z < y \Rightarrow z \in M$$

Pak M je interval.

DŮKAZ:

Definujme $a := \inf M$, $b := \sup M$, $a \leq b$ (množina M je neprázdná) a tedy $(a, b) \subseteq M \subseteq [a, b]$. Tedy M je interval.
Q.E.D.

Nechť $y_1, y_2 \in f(I)$:

$$\exists\, x_1, x_2 \in I: \;\; f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $y_1 < y_2$. Nechť $y_3 \in (y_1, y_2)$. Dle V.8- pak

$$\exists\, x_3 \in [x_1, x_2]: \;\; f(x_3) = y_3$$

Tedy má $f(I)$ vlastnosti množiny M z lemmatu, takže je dle lemmatu $f(I)$ interval.
Q.E.D.

Definice:

Máme-li $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$:

- **(i)** **maxima na** M, jestliže $\forall x \in M,\; f(x) \leq f(a)$
- **(ii)** **minima na** M, jestliže $\forall x \in M,\; f(x) \geq f(a)$
- **(iii)** **ostrého maxima na** M, jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\},\; f(x) < f(a)$
- **(iv)** **ostrého minima na** M, jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\},\; f(x) > f(a)$
- **(v–viii)** **lokálních**, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na množině $M \cap \mathcal{U}(a, \delta)$ maxima (minima)

T-O-D-O: 1S je nějaké **divné**. . .

VĚTA 1S (Heineova věta pro spojitost):

Nechť f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá v bodě a, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \in D(f)$, $\lim_{n\to a} x_n = a$ platí $\lim_{n\to a} f(x_n) = f(a)$.

Cvičení:

Rozmyslete si, proč v této větě musí být navíc předpoklad $x_n \neq a$.

Známe: f spojitá v $a \Leftrightarrow [x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)]$.
Otázka: Kdy nabývá funkce svého maxima či minima?

$$A = \{f(x),\; x \in D(f)\},\; \exists \sup A$$

Příklady:

- **(i)** $f(x) = x$ na $(0, 1)$. **T-O-D-O:** graf
- **(ii)** f na $[0, 1]$ nemá maximum. Je spojitá na $[a, b]$? **T-O-D-O:** graf

VĚTA 10 (vztah spojitosti a extrémů):

Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak f nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima.

DŮKAZ:

$$A = \{f(x),\; x \in [a, b]\},\; M = \sup A$$

Z vlastností suprema: $\exists$ posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Pak $\{x_n\} \subset [a, b]$, tedy $\{x_n\}$ je omezená.

Tudíž dle Bolzano-Weistrasse $\exists$ posloupnost $\{x_{n_k}\}$,

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$$

f je spojitá v c, tudíž

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

Ale přitom $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$, neboli

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$$

Podle věty o jednoznačnosti limity: $M = f(c)$, tedy f nabývá svého maxima M v bodě c.
Minimum obdobně.
Q.E.D.

VĚTA 11 (vztah spojitosti a omezenosti):

Spojitá funkce na $[a,b]$ je omezená.

DŮKAZ:

Dle V.10- f nabývá min, max. Označme $m = \min f$, $M = \max f$. Pak $m \le f(x) \le M$ pro $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f$ je omezená.
Q.E.D.

Pozn.: Předpoklady jsou podstatné!

Prostá funkce

Definice:

Řekneme, že f je **prostá (injektivní)** funkce, jestliže $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ pro $\forall x, y \in D(f)$.

Příklady:

(i) sin není prostý na $\mathbb{R}$, ale je na $[-\pi/2, \pi/2]$.
(ii) Konstantní funkce nebývá prostá.

Inverzní funkce

Definice:

Nechť f je prostá funkce na $M \subset \mathbb{R}$, kdy $f\colon M \mapsto f(M)$. Pak **inverzní** funkce k f (označíme f^{-1}) je definována na $f(M)$ pro $\forall y \in f(M)$ jako:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Příklady:

(i) $f(x) = x^2$ na $[0,\infty)$
(ii) $f(y) = \sqrt{y}$ na $[0,\infty)$

VĚTA 12 (o inverzní funkci):

Nechť I je interval v $\mathbb{R}$, f je definovaná, spojitá a rostoucí (či klesající) na I. Pak f^{-1} je definovaná, spojitá a rostoucí či klesající na $f(I)$.

DŮKAZ:

Definovanost a monotonie

Nechť f je například rostoucí, pak f^{-1} je definovaná a rostoucí na $f(I)$.

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_i) \\ x_i &= f^{-1}(y_i) \end{aligned}$$

$$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Spojitost

Zvolíme $y_0 \in f(I)$, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $\varepsilon > 0$. Nechť y_0 je vnitřním bodem $f(I)$, pak x_0 je vnitřním bodem I.

$$\exists\, x_1, x_2,\ x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \subset \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$$

Zvol $\delta > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(y, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Tedy pro $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tak, že:

$$f^{-1}\left(\mathcal{U}(y_0, \delta)\right) \subseteq f^{-1}\left(f(x_1), f(x_2)\right) = (x_1, x_2) \subseteq \mathcal{U}(x_0, \varepsilon) = \mathcal{U}\left(f^{-1}(y_0), \varepsilon\right)$$

Tedy f^{-1} je spojitá v y_0. Obdobně pro krajní body ($\langle$cvičení$\rangle$).

Q.E.D.

Zavedení elementární funkce

Chceme definovat transcendentní funkce, zejména:

- exp, log, a^x
- goniometrické funkce (sin, cos, tg, cotg)
- cyklometrické funkce (arcsin, arccos, arctg, arccotg)
- hyperbolické funkce (sinh, cosh, tgh, cotgh)

VĚTA 13 (zavedení exponenciální funkce):

$\exists!$ reálná funkce "exp" splňující axiomy:

(i) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $\exp x \geq 1 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

DŮKAZ:

(A) Jednoznačnost (předpokládáme, že existuje):

(1) $\exp(mx) = (\exp x)^m \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$: Triviálně indukcí z (i).

(2) $\exp(0) = 1$:

$$\exp(0) = \exp(0+0) \overset{\text{(i)}}{=} \exp(0)^2 \Rightarrow \exp(0) = \begin{cases} 1 \\ 0 & \text{nikdy — (ii)} \end{cases}$$

(3) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$:

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

(4) $\exp x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$: Ihned plyne z (3).

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = +\infty$: Ihned plyne z (ii) — dolní policajt $(1+x)$.

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$: Kombinace (3) a (5).

(7) $\exp x > 1 \quad \forall x > 0$: Ihned z (ii).

(8) exp $\nearrow$ na $\mathbb{R}$:

$$x < y \Rightarrow 1 \overset{(7)}{<} \exp(y-x) = \frac{\exp y}{\exp x} \Rightarrow \exp y > \exp x$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$ (!)

$$\frac{1}{\exp x} \overset{(3)}{=} \exp(-x) \overset{\text{(ii)}}{\geq} 1 - x$$

To znamená:

$$1 + x \overset{\text{(ii)}}{\leq} \exp x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow x \leq \exp x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{\exp x - 1}{x}}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to 1}$$

(10) exp je spojitá na $\mathbb{R}$:
Pro $\forall a \in \mathbb{R}$ musí platit:

$$\lim_{x\to a}(\exp x - \exp a) = \lim_{x\to a} \exp a \cdot \left(\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to a} \underbrace{\exp a}_{\to \exp a} \underbrace{\left(\frac{\exp(x-a) - 1}{x-a}\right)}_{\overset{(9)}{\to} 1} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \overset{\text{VOAL}}{=} 0$$

(11) $\exp x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (!!)
Takto při definici limitou také dokážeme jednoznačnost — limity jsou jednoznačné.

$$\exp\left(-\frac{x}{n}\right) \overset{\text{(ii)}}{\geq} 1 - \frac{x}{n}$$

To znamená:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$\forall x > 0 : \underbrace{1}_{\to 1} \leq \frac{\exp x}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}}_{\to 1} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{-1}}_{\to 1}$$

(pro dost velká n)

(B) Existence:
Dokazujeme existenci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. krok
$\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\}$ je rostoucí pro $x > 0$.
Použijeme AG-nerovnost ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}{n+1}$$

pro $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$, $a_{n+1} = 1$:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \overset{\text{AG}}{\leq} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right) n + 1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

Tedy je posloupnost $\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\}$ rostoucí.

2. krok
Posloupnost $\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\}$ je omezená.
Víme, že je monotónní, tedy stačí dokázat, že nějaká podposloupnost je omezená.
Tvrzení: $\{a_n\}$ monotónní a $\{a_{n_k}\}$ omezená $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ omezená. Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$.
Dokážeme, že

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$$

Potřebuji k tak velké, aby $\dfrac{x}{k+x} < 2$, tj. aby platil Bernoulli.

$$\left(1+\frac{x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk+x}{nk}\right)^{-n} = \left(\frac{nk}{nk+x}\right)^{n} = \left(x - \frac{x}{nk+x}\right)^{n}$$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{nx}{nk+x} \geq 1 - \frac{x}{k}, \text{ umocnit na } k$$

Poslední nerovnost platí, neboť $nkx \leq nkx + x^2$.

Q.E.D.

Poznámky:

- **(i)** $\exp(0) = 1$
- **(ii)** $\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- **(iii)** exp je rostoucí, $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty) \Rightarrow$ exp má inverzní funkci na $(0,\infty)$. Tuto funkci nazveme přirozeným logaritmem, značíme "log".
- **(iv)** $a > 0$, def. $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

VĚTA 14 (základní vlastnosti logaritmu):

Funkce log, definovaná předpisem

$$\log = \exp^{-1}$$

má následující vlastnosti:

- **(i)** $D(\log) = (0,\infty)$, $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$
- **(ii)** $\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in (0,\infty)$, $\log(x^n) = n \log x$
- **(iii)** log je spojitý, rostoucí na $(0,\infty)$, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$, $\log 1/x = -\log x$
- **(iv)** Základní limity:

$$\lim_{x\to 0_+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

DŮKAZ:

Plyne z odpovídajících vlastností funkce exp. $\langle$cvičení$\rangle$
Q.E.D.

Obecná mocnina

$a > 0$ (!), $b \in \mathbb{R}$, pak definuji

$$a^b \overset{\text{def}}{=} \exp(b \log a)$$

Speciálně, definuji funkci $a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \log a)$. Pro $a = e:\ e^x = \exp x$.

Poznámka:

$$x^2 = e^{2\log x} = e^{\log x + \log x} = e^{\log x} \cdot e^{\log x} = x \cdot x = x^2$$

Sinus

Co od něj chceme?

- definovaná na $\mathbb{R}$
- spojitá
- 2π-periodická
- omezená
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- součtové vzorce
- pevné body:

$$\sin(0) = 0,\ \sin(\pi/2) = 1,\ \sin(\pi) = 0$$
$$\sin(0) = 1,\ \sin(\pi/2) = 0,\ \sin(\pi) = -1$$

Středoškolská definice

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Ale v čem měřím α? Ve stupních vznikne něco "rozhňácaného", ale s radiány se dostáváme do kruhu, neboť nemáme definovánu obloukovou vzdálenost. Tu bych musel matematicky definovat zase přes sin.

VĚTA 15 (goniometrické funkce):

$\exists!$ reálná funkce s a $\exists!$ reálná funkce c takové, že:

(i)

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$$

(ii) s lichá, c sudá (na $\mathbb{R}$)

(iii) $s > 0$ na $(0,1)$, $s(1) = 0$

DŮKAZ:

Nechť takové funkce existují. Pak:

(1) $s(0) = 0$ (z lichosti)
$c(0) = 1$:

$$c(x + (-x)) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x) \overset{\text{sudost}}{=} c^2(x) + s^2(x)$$

$$c(0) = c(0+0) = c^2(0) + s^2(0) = c^2(0) \Rightarrow c(0) = 1$$

T-O-D-O: Ale to platí i pro $c(0) = 0 \ldots$?!

(2) $c^2(x) + s^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Plyne z předchozího — ekvivalentní k $c(x + (-x)) = c(0) = 1$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}: \ s(2x) = 2s(x)c(x)$
$c(2x) = c^2(x) - s^2(x)$

Ihned plyne z (i).

(4) $s\,(1/2) = 1,\ c\,(1/2) = 0$

$$0 \overset{\text{(iii)}}{=} s(1) \overset{(3)}{=} 2 \underbrace{s\,(1/2)}_{>0\ \text{(iii)}} c\,(1/2) \Rightarrow c\,(1/2) = 0$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} s\,(1/2) = 1$$

(5) $c(1) = -1$

$$c(1) = c\,(2 \cdot 1/2) \overset{(3)}{=} c^2\,(1/2) - s^2\,(1/2) = 0 - 1$$

(6) $s(x+1) = -s(x)$ (antiperiodicita):

$$s(x+1) = s(x) \underbrace{c(1)}_{-1} + c(x) \underbrace{s(1)}_{0} = -s(x)$$

$s(x+2) = s(x)$ (periodicita):

$$\begin{aligned} s(x+2) &= s(x)c(2\cdot 1) + c(x)s(2\cdot 1) \\ &= s(x) \underbrace{(c^2(1) - s^2(1))}_{1} + c(x) \underbrace{(2s(1)c(1))}_{0} \\ &= s(x) \end{aligned}$$

(7) $s\,(1/2 - x) = c(x)$

$$s\,(1/2 - x) = \underbrace{s\,(1/2)}_{1} c(x) - \underbrace{c\,(1/2)}_{0} s(x) = c(x)$$

(8) $c > 0$ na $(0, 1/2)$ — z (7) a (iii)

(9) s je rostoucí na $(0, 1/2)$, c je klesající na $(0, 1/2)$.
Volíme x, y tak, aby $0 < x - y < x < 1/2$ (tedy také $0 < y < x$),

$$\begin{aligned} s(x-y) &= s(x) \underbrace{c(y)}_{\leq 1} - \underbrace{c(x)s(y)}_{>0\ (8),\ \text{(iii)}} \\ &\leq s(x) \end{aligned}$$

(10-)

$$c\,(1/2^n) = \sqrt{\frac{1 + c1/2^{n-1}}{2}}$$
$$s\,(1/2^n) = \sqrt{\frac{1 - c1/2^{n-1}}{2}}$$

⟨cvičení⟩

(10) s, c spojité v bodě 0.
V bodech $k2^{-n}$ definujeme funkce s, c dle (10–). V ostatních bodech ($x \neq k2^{-n}$) pak limitně supremem:

$$x \neq k2^{-n}: \ s(x) = \sup\{s(y), y = k2^{-n}, y < x\},\ x \in (0, 1/2)$$

Stačí definovat na $(0, 1/2)$, na zbytku nadefinujeme z periodicity a antiperiodicity. $a_n := c\,(1/2^n)$, pak $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$. Podle (9) je a_n rostoucí a omezená $\Rightarrow \lim a_n = A$, $A = \sqrt{\frac{1+A}{2}} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} s(0) = 0 \Rightarrow c$ je spojité.

(11) $s(a) - s(b) = 2s\left(\frac{a-b}{2}\right) c\left(\frac{a+b}{2}\right)$
⟨cvičení⟩: Z (i).

(12) s, c spojité na $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a}(s(x) - s(a)) \overset{\text{(ii)}}{=} 2\lim_{x\to a} \underbrace{s\left(\frac{x-a}{2}\right)}_{\to 0} \underbrace{c\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{\le 1}$$

(13) Existuje vlastní $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{s(x)}{x} = \pi$. **(Důležité!)**

$$t(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{s(x)}{c(x)},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{1/2+k\}$$

Potom t je lichá, rostoucí na $(-1/2, 1/2)$ a

$$t(x+y) = \frac{t(x)+t(y)}{1-t(x)t(y)}$$

$$t(1/4) = 1$$

$$\begin{aligned} x, y \in (0, 1/4):\ & t(x+y) \ge t(x) + t(y) \\ & s(x+y) \le s(x) + s(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t(x) \ge s(x)$$

$$\Rightarrow\ \forall k, m, n \in \mathbb{N},\ k2^{-n} \in (0, 1/4):$$

$$t(k2^{-n}) \ge kt(2^{-n}) \ge ks(2^{-n}) \ge \frac{k}{m}s(2^{-n}m)$$

$$\Rightarrow \frac{t(k2^{-n})}{k2^{-n}} \ge \frac{s(2^{-n}m)}{m2^{-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{t(y)}{y} \ge \frac{s(y)}{y} \qquad \forall x, y \in (0, 1/2)$$

Definujeme $\pi := \inf\limits_{y\in(0,1/2)} \dfrac{t(y)}{y}$.

$$\underbrace{\pi}_{\to\pi} \ge \underbrace{\frac{s(x)}{x} = \frac{t(x)}{x}c(x)}_{\to\pi(policie)} \ge \underbrace{\pi c(x)}_{\to\pi 1}$$

Q.E.D.

Definujeme:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= s\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ \cos(x) &= c\left(\frac{x}{\pi}\right) \\ \mathrm{tg}(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \mathrm{cotg}(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

Pak bude platit:

(i) $\sin, \cos$ jsou 2π–periodické, π–antiperiodické a spojité na $\mathbb{R}$
(ii) $\sin$ je rostoucí na $(-\pi/2, \pi/2)$
(iii) $\cos$ je klesající na $(0, \pi)$

(iv) Základní limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\sin x)} = 1/2$$

Poznámky:

(i) Alternativní způsob:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Buď můžeme dokázat pomocí odhadů, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

nebo dokázat, že:

$$E(x+y) = E(x)\cdot E(y) \ \textit{(součin řad)}$$

$$E(x) \geq 1 + x \ \textit{(pro } y > 0 \textit{ triviální)}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

(ii) Základní limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$a > 0 : \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{\underbrace{x \log a}_{\to 1}} \log a = \log a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to 1/2} = 1/2$$

Tedy v nule se $e^x - 1$ a $\sin x$ chovají v okolí nuly stejně jako lineární, $1-\cos x$ jako kvadratické.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} x = 0$$

Cyklometrické funkce

arcsin

sin je prostý pro $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Definuji $\arcsin x$ pro $x \in [-1, 1]$ předpisem

$$\arcsin x = y \iff y \in [-\pi/2, \pi/2] \wedge \sin y = x$$

(Graf je sin otočený o 90° doprava. Funkce je rostoucí a spojitá.)

Cvičení:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$ (pomocí věty o limitě inverzní funkce)

arccos

Obdobně $\arccos x$ pro $x \in [-1, 1]$ předpisem

$$\arccos x = y \iff y \in [0, \pi] \wedge \cos y = x$$

(Graf je arcsin posunutý o $\pi/2$ nahoru a vzhůru nohama ;-). Funkce je klesající a spojitá.)

Cvičení:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x}} =?$ (pro fajnšmekry)

arctg, arccotg

$\operatorname{tg} x$: zúžíme definiční obor na $(-\pi/2, \pi/2)$. Pak můžeme definovat arctg jako inverzní k $\operatorname{tg} x$ na $(-\pi/2, \pi/2)$. (Graf je tg naležato. Funkce je spojitá, rostoucí, omezená a na $\mathbb{R}$.)

$$\operatorname{arctg} x = y \iff y \in (-\pi/2, \pi/2) \wedge \operatorname{tg} y = x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\operatorname{arccotg} x = y \iff y \in (0, \pi) \wedge \operatorname{cotg} y = x$$

(Graf je arctg posunutý o $\pi/2$ nahoru a vzhůru nohama ;-).)

Derivace reálné funkce

Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$. Pak **derivací funkce** f **v bodě** a rozumíme

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(pokud existuje).

Derivací zprava a zleva rozumíme

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Poznámky:

(i)

$$f'(a) \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

(ii) $f'(a)$ existuje $\iff$ existuje $f'_+(a), f'_-(a) \wedge f'_+(a) = f'_-(a)$

(iii) $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\langle$cvičení$\rangle$

Příklady:

(i) $f(x) \equiv a$

$$f'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

(ii) $f(x) = x^n$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^n + nha^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 a^{n-2} + \cdots + h^n - a^n}{h}$$

$$= na^{n-1} + \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{2} ha^{n-2} + \cdots h^{n-1} \right) = na^{n-1}$$

(iii) $f(x) = e^x$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^a$$

(iv) $f(x) = \sin x$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h - \sin a}{h} 1$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin a \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos a \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos a$$

(v) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(a) = -\sin a$ $\langle$cvičení$\rangle$

(vi) $f(x) = |x|$

$$f'(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

$f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'(0)$ neexistuje.

(vii) $f(x) = \operatorname{sign} x$

$$f'(a) = 0,\ a \neq 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-1}{h} = +\infty$$

$$\operatorname{sign}'(0) = +\infty$$

VĚTA 16 (vztah derivace a spojitosti):

Má-li funkce f v bodě a **vlastní** derivaci, pak je f spojitá v bodě a.

DŮKAZ:

$$\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\to 0} = 0$$

Q.E.D.

VĚTA 17 (aritmetika derivací):

Nechť existují $f'(a)$, $g'(a)$.

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.

(ii) Je-li g spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.

(iii) Je-li g spojitá v a, $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}.$$

DŮKAZ:

(i)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+g) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

(ii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{g(a+h)}_{\substack{\to g(a) \\ \textit{(spojitost!)}}} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} + f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$$

(iii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}$$

$$= \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

(Opět jsme použili spojitost, tedy $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$.)

VĚTA 18 (o derivaci složené funkce):

Nechť f má derivaci v bodě y_0, g v bodě x_0, g je spojitá v x_0 a $y_0 = g(x_0)$. Potom $(f\circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován (tedy se nejedná o $0\cdot\infty$).

DŮKAZ:

Idea:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Ale co když $g(x) - g(x_0) = 0$?

(i) Nechť $f'(y_0) \in \mathbb{R}$:
Definujme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{pokud } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{pokud } y = y_0 \end{cases}$$

F definujeme na nějakém okolí bodu y_0. Potom je F spojitá v bodě y_0.

Víme, že f je definována na nějakém okolí y_0 a g na nějakém okolí x_0. Tvrdím tedy, že

$$\lim_{x\to x_0} F(g(x)) = f'(y_0),$$

neboť

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \wedge \lim_{y\to g(x_0)} F(y) = F(g(x_0))$$

(to vyhovuje předpokladu 2 věty o spojitosti složené funkce).

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = F'(y_0)g'(x_0)$$

(dle VOAL, neboť výraz vpravo je definován).

(ii) Nechť $f'(y_0) = \pm\infty$:
Protože $f'(y_0)g'(x_0)$ je definován (dle předpokladu) a $f'(y_0) = \pm\infty$, pak jistě $g'(x_0) \neq 0$.
Tedy $\exists \mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \neq 0$, tedy $g(x) \neq g(x_0)$. Tudíž

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Q.E.D.

Příklad:

(i) $(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$ $\qquad (a > 0)$

(ii) $(x^x)' = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = x^x \cdot (1 \log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1)$ $\qquad (x > 0)$

VĚTA 19 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I, a buď vnitřní bod I. Označíme $b = f(a)$.

(i) Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

(ii) Je-li $f'(a) = 0$ (např. v nule pro x^3) a f je rostoucí (klesající):

$$(f^{-1})'(b) = +\infty \ (-\infty)$$

DŮKAZ:

Idea:

$$f^{-1}(y) = x, \ y = f(x)$$

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Víme: f^{-1} je definovaná, spojitá a ryze monotónní na $f(I)$, b je vnitřním bodem itnervalu $f(I)$, $a = f^{-1}(b)$.

(i) $(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$
Definujme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pokud } x \neq a \\ f'(a) & \text{pokud } x = a \end{cases}$$

Tak $\lim_{x \to a} F(x) = f'(a)$ a zároveň je F spojitá v a (bude zastupovat vnější funkci).
Dále $\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ (vnitřní funkce), neboť f^{-1} je spojitá na $f(I)$. Tedy dle věty o spojitosti složené funkce:

$$\lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}} \end{aligned}$$

(ii) Bez újmy na obecnosti nechť je f rostoucí, $f'(a) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \Rightarrow y > b \Rightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(b) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \Rightarrow y < b \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = +\infty$$

Q.E.D.

Poznámka:

Využili jsme větu: $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a,\delta)$, pak $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (viz V2.8-a Heine).

Příklady:

(i) $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$, neboť $\exp^{-1} = \log$.

$$e^x = y,\ x = \log y$$

$$(e^x)' = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

(ii) $(\arcsin x)'$

$$y = \arcsin x,\ x = \sin y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$(\arcsin x)' \overset{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

(iii) $(\operatorname{arctg} x)'$

$$y = \operatorname{arctg} x,\ x = \operatorname{tg} y$$

$$1 + \overset{2}{\operatorname{tg}} y = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' \overset{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

(iv) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$

(v) $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

VĚTA 20 (nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém. Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$ (tedy má funkce v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou x).

DŮKAZ:

Sporem: Nechť $f'(a)$ existuje, leč $f'(a) \neq 0$.
Z existence derivace plyne existence okolí $\mathcal{U}(a,\delta) \subseteq M$. Bez újmy na obecnosti nechť $f'(a) > 0$. Potom $\exists\, \xi > 0$ takové, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}(a,\xi)$.
Tedy, je-li $x < a$, pak $x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^-(a,\xi)$.
Naopak, je-li $x > a$, pak $x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\xi)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(a),\ x \in \mathcal{P}^-(a,\xi) \\ f(x) > f(a),\ x \in \mathcal{P}^+(a,\xi) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nemá lokální extrém v } a$$

$\not\sharp$ *Spor*

Typická úloha

f spojitá na $[a,b]$, najděte maximum (minimum) funkce na $[a,b]$.
Postup:

1. f spojitá na $[a,b] \Rightarrow f$ nabývá maxima, minima

2. V.20- $\Rightarrow$ tyto extrémy mohou být pouze v bodech, kde:

- **(i)** $f'(x_0) = 0$
- **(ii)** $f'(x_0)$ neexistuje
- **(iii)** $x_0 = a$, $x_0 = b$

Příklad:

Tzv. "bačův problém" — bača má k dispozici 100m plotu a chce si s ním oplotit co největší pastvinu. Definuje si tedy hodnotící funkci pastviny

$$f(x) = 50x - x^2,\ x \in [0,50]$$

a derivací hledá maximum:

$$f'(x) \text{ existuje pro } \forall x \in (0,50)$$

$$f'(x) = 50 - 2x$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

Tedy máme 3 kandidáty na extrémy:

$$x = 25 \Rightarrow f(x) = 625\,\mathrm{m}^2$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x = 50 \Rightarrow f(x) = 0$$

L'Hospital a přátelé

Idea

Počítat limity přes derivace, když jsou tak derivace definované.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \stackrel{?}{=} \frac{\lim\dots}{\lim\dots} \stackrel{?}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

VĚTA 21 (Rolleova):

Nechť f je spojitá na $[a,b]$, $a<b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Nechť $f(a)=f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi)=0$.

DŮKAZ:

(i) Nechť $f(x)=f(a)$ pro $\forall x \in [a,b]$, pak $f'(x)=0$ pro $\forall x \in (a,b)$.

(ii) Nechť $\exists\, x \in (a,b),\ f(x) \neq f(a)$, tedy bez újmy na obecnosti $f(x) > f(a)$. Protože f je spojitá na $[a,b]$, existuje lokální extrém $\xi \in [a,b]$ (největší $f(x)$). Dle předpokladu $f'(\xi)$ musí existovat, tedy podle V.20- je $f'(\xi)=0$.

Q.E.D.

VĚTA 22 (Lagrangeova věta o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $[a,b]$, $a<b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(Tedy existuje v nějakém bodě derivace (tečna) rovnoběžná s nakloněnou podstavou (spojnicí krajních bodů). **T-O-D-O:** Obrázek.)

DŮKAZ:

Definujme

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

(na základě divoké analyticko-geometrické úvahy).

Potom $F(a)=0 \ \wedge\ F(b)=0$. Pak podle Rolleovy věty $\exists\, \xi \in (a,b) : F'(\xi)=0$. Tedy

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a tudíž

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Q.E.D.

VĚTA 23 (Cauchyova věta o střední hodnotě):

Nechť f, g jsou spojité na $[a,b]$, $a<b$ a nechť $\exists\, f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$ a $\exists\, g'(x)$ vlastní a nenulová pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

DŮKAZ:

$g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by dle Rolleovy věty existovalo $\xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$, což by byl spor. Definujeme

$$H(x) := (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Potom $H(a) = H(b) = 0$, H je spojitá na $[a,b]$, existuje H' na $[a,b]$.
Tedy dle Rolleovy věty $\exists\, \xi \in (a,b)$ takové, že

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(neboť $g'(\xi) \neq 0$, $g(b) - g(a) \neq 0$).
Q.E.D.

VĚTA 24 (L'Hospitalovo pravidlo):

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g jsou definovány na nějakém $\mathcal{P}^+(a,\delta)$.

(i) Nechť $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = \lim\limits_{a\to a_+} g(x) = 0$ a existuje

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $\lim\limits_{x\to a_+} |g(x)| = +\infty$ a existuje

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

DŮKAZ:

(i) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\delta) :\ \exists\, f'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

"Dodefinuji" funkce f a g v bodě A: $f(a) = g(a) = 0$. Nyní nechť $x \in \mathcal{P}^+(a,\delta)$. (Obrázek.) Potom f, g jsou spojité na $[a,x]$, neboť obě mají vlastní derivaci na celém $\mathcal{P}^+(a,\delta)$.

Tedy jsou splněny předpoklady V.23- (na intervalu $[a,x]$!) a proto platí, že $\exists \xi \in (a,x)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

(ξ závisí na x! Značíme $\xi = \xi(x)$.)

Zvolme $\varepsilon > 0$. Víme, že existuje $\omega > 0$ takové, že

$$\forall y \in \mathcal{P}^+(a,\omega) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathcal{U}(A,\varepsilon).$$

Pro $x \in \mathcal{P}^+(a,\delta) \cap \mathcal{P}^+(a,\omega)$ najdeme $\xi = \xi(x)$ podle receptu na začátku důkazu. Potom

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathcal{U}(A,\varepsilon).$$

Víme ale, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

tedy také

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{U}(A,\varepsilon).$$

Takže

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) $a = -\infty$

Převedeme na předchozí případ pomocí substituce

$$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right),\ F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$
$$G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right),\ G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\lim_{y\to 0_+} \frac{F(y)}{G(y)}}_{=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{y'(x)}$$

(ii) Technická záležitost, považujeme za dokázané (nezkouší se).

Poznámky, příklady, varování:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{2x+2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = \frac{2}{2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}\cdot\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+\sin x} = +\infty$, ale $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+\cos x}$ neexistuje.

(iv) L'Hospital vhodný např. pro

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3},\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2},\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x}{2}^2}{x^4},\ \ldots$$

(v) $\lim\limits_{x\to 1_-}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

$$e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\log(2-x)}{1-x}(1-x)} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)(1-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}(1-x)$$

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1_-}\frac{-1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{2}{\pi} \to \frac{2}{\pi}$$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n} \overset{\text{Heine + L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3^x\log 3} \overset{\text{L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3^x(\log 3)^2} = 0$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} \overset{\text{L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Další vlastnosti derivací

$f'_+(a)$, je $f'(a)$ spojitá zprava v a?

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivace v bodě je číslo (směrnice tečny), vyjadřující míru změny. Zároveň je ale f' funkce, $x \mapsto f'(x)$. f buď spojitá na I, $\exists\, f'$ (vlastní) na I. Je f' spojitá?
Není.

Příklad:

$\sin\frac{1}{x}$ není definována v nule.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(obrázek)

Tvrdím, že tato funkce má v nule derivaci nula.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Je f' v 0 spojitá? Není, protože $\lim_{x\to 0} f'(x)$ neexistuje.
Co kdyby limita existovala?

VĚTA 25 (o limitě derivací):

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\exists \lim\limits_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$.

DŮKAZ:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{1} = A$$

Můžeme L'Hospitalovat?

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to a_+}(x - a) = 0 \\ \lim_{x\to a_+}(f(x) - f(a)) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ můžeme}$$

Q.E.D.

VĚTA 26 (vztah derivace a monotonie):

Nechť I je nezdegenrovaný interval, označme $\mathrm{Int}(I) = \{\text{vnitřní body } I\}$. Nechť f je spojitá na I a f' existuje vlastní na $\mathrm{Int}(I)$.

(i) Je-li $f' > 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je rostoucí na I.

(ii) Je-li $f' \geq 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je neklesající na I.

(iii) Je-li $f' < 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je klesající na I.

(iv) Je-li $f' \leq 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je nerostoucí na I.

DŮKAZ:

Idea: Mějme $f(a)$, $f(b)$, pak existuje mezi a a b bod ξ, $0 < f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Lagrange:

$$\forall a, b \in I \ (a < b) \ \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ale $f'(\xi) > 0 \wedge b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ rostoucí na I.
Pro ostatní případy analogicky.
Q.E.D.

Poznámka:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \qquad \forall x \in D(f)$$

Ale funkce f není rostoucí na $D(f)$. Tedy je důležitá úloha **intervalu**.

Varování

$f' > 0$ na $I_1 \cup I_2 \not\Rightarrow f$ rostoucí na I_1, I_2.

Konvexní a konkávní funkce

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Označíme

$$T_a = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ leží nad (pod) **tečnou** T_a, jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$ (resp. $f(x) < \ldots$).

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže $\exists\, \delta$ tak, že:

Buď: $\forall x \in (a-\delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad T_a a $\forall x \in (a, a+\delta) : [x, f(x)]$ leží pod T_a
nebo: $\forall x \in (a-\delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod T_a a $\forall x \in (a, a+\delta) : [x, f(x)]$ leží nad T_a.

VĚTA 27 (nutná podmínka existence inflexe):

Jestliže $f''(a) \neq 0$, pak f nemá v bodě a inflexi.

DŮKAZ:

Bez újmy na obecnosti nechť $f''(a) > 0$. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$$

Tedy $\exists\, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a, a+\delta) : f'(x) > f'(a) \ \wedge\ \forall x \in (a-\delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Zvolme $y \in (a, a+\delta)$. Pak f je spojitá na $[a, y]$ a $\exists\, f'$ na (a, y). Tedy dle pana Lagrange $\exists\, \xi \in (a, y)$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a)$$

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y-a) \qquad \forall y \in (a, a+\delta)$$

Tedy jsme nad T_a.

Analogicky:

Zvolme $z \in (a-\delta, a)$. Pak f je spojitá na $[z, a]$ a $\exists\, f'$ na (z, a). Tedy dle pana Lagrange $\exists\, \psi \in (z, a)$:

$$\frac{f(a) - f(z)}{a - z} = f'(\psi) < f'(a)$$

$$f(z) < f(a) + f'(a)(z-a) \qquad \forall z \in (a-\delta, a)$$

Tedy není inflexe v a!

Poznámky:

(i) $f''(a) = 0 \not\Rightarrow f$ má v bodě a inflexi!
Viz $f(x) = x^4,\ a = 0.\ f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f''(0) = 0.$

(ii) Jestliže $f''(a)$ neexistuje, pak f může a nemusí mít inflexi v bodě a.
Viz $f(x) = x|x|.\ f''(0)$ neexistuje, ale f má v bodě nula inflexní bod.

VĚTA 28 (postačující podmínka pro existenci inflexe):

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$. Nechť pro $\forall x \in (a, z)$ platí $f''(x) > 0$ a pro $\forall x \in (z, b)$ platí $f''(x) < 0$ (nebo naopak). Pak z je bod inflexe funkce f.

DŮKAZ:

Nechť $f'' > 0$ na (a, z), $f'' < 0$ na (z, b). Potom dle V.26- je f' rostoucí na (a, z) a klesající na (z, b).

$$\exists \xi \in (z, b) : \ \frac{f(b) - f(z)}{b - z} = f'(\xi) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(b) < f(z) + f'(z)(b - z)$$

(pod tečnou)

$$\exists \eta \in (a, z) : \ \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(\eta) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(a) > f(z) + f'(z)(a - z)$$

(nad tečnou)
Totéž platí pro každý bod $x \in (z, b)$ a $y \in (a, z)$, tedy

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(z) + f'(z)(x - z) \\ f(y) > f(z) + f'(z)(y - z) \end{array}\right\} \Rightarrow \ f \text{ má v bodě } z \text{ inflexi.}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + x^2)^2} 2x$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} \begin{cases} > 0 & \text{pro } x < 0 \\ < 0 & \text{pro } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \ f \text{ má v 0 inflexi}$$

$$f''(0) \text{ existuje } \ \Rightarrow f''(0) = 0$$

T-O-D-O: TADY TOHO **HODNĚ** CHYBÍ! (DEFINICE KONK/KONV, TŘI VĚTY, ASYMPTOTY, ...)

Asymptoty

(Zhruba.)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = a$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$$

Pokud jsou obě limity konečné, asymptota je

$$y = ax + b$$

(jinak asymptota není).

(Ekviv. druhá asymptota pro $-\infty$.)

Průběh funkce

Cvičení:

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(1) $D(f)$

$$D\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \mathbb{R}$$

$$D(\arcsin) = [-1, 1]$$

$$\Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\}$$

$$\left.\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2x}{1+x^2} \\ -1 - x^2 &\leq 2x \\ 0 &\leq 1 + 2x + x^2 = (x+1)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} &\leq 1 \\ 2x &\leq 1 + x^2 \\ 0 &\leq 1 - 2x + x^2 = (x-1)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

Obor spojitosti: $2x$, $1 + x^2$ — polynomy $\Rightarrow$ spojité na $\mathbb{R}$. sin spojitý a ryze monotonní na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ dle věta o inverzní funkci je arcsin spojitý na $[-1, 1]$ $\Rightarrow$ dle VOLSF (P1) je f spojitá na $\mathbb{R}$.

(2) Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, $[0, 0]$ Průsečík(y) s osou x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, $[0, 0]$

(3) Symetrie:
Funkce je lichá, neboť

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

(arcsin je lichý).
Funkce není sudá (neboť $f \not\equiv 0$) nebo $f(1) = \frac{\pi}{2}$, ale $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Funkce není periodická, neboť $f(0) = 0$, ale $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4) Limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \arcsin(y) = 0$$

arcsin je spojitý v 0 $\Rightarrow$ (P1)

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Z lichosti (nebo analogickým výpočtem)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

(5) První derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

pro $x \neq \pm 1$.
Pozn.: $\sqrt{y^2} = |y|$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

Pozn.: $\frac{y}{|y|} = \operatorname{sign}(y)$ jen pro $y \neq 0$!

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$

Existuje $f'(\pm1)$? Nevíme, ale spočítáme $f'_\pm(\pm1)$. Dvě možnosti:

- Z definice: $f'_+(1) = \lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
- Z věty o limitě derivací: $f'_+(1) = \lim_{x\to1+} f'(x)$, f je spojitá na $\mathcal{P}^+(1)$.

Z věty o limitě derivací:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1_+} f'(x) = \lim_{x\to1_+}\frac{-2}{1+x^2} \overset{\text{dosazení + spojitost}}{=} \frac{-2}{1+x} = -1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to1_-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1_-}\frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-\frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$\overset{\text{L'H “}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to1_-}\frac{2}{1+x^2} \overset{\text{dosazení}}{=} \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\Rightarrow f'(1) \text{ neexistuje}$$

(Analogicky $f'(-1)$ neexistuje. Buď z lichosti nebo analogickým výpočtem.)

(6) Intervaly monotonie:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f' < 0 \Rightarrow\nearrow$	$f' > 0 \Rightarrow\searrow$	$f' < 0 \Rightarrow\nearrow$

(7) Extrémy:
Mohou být jen v bodech x, kde $f'(x)$ neexistuje nebo $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \; \ldots \; & \text{ neexistují} \\ f'(x) \nexists \; \ldots \; & x = \pm 1, \; \text{kandidáti na extrém} \end{aligned}$$

(i) $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} f \searrow \; \ldots \; \mathcal{P}^-(-1,\delta) \\ f \nearrow \; \ldots \; \mathcal{P}^+(-1,\delta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow -1 \text{ je bod lokálního minima}$$

(ii) $x = 1$:
Z lichosti: $x = 1$ je bod lokálního maxima. Další extrémy f nemá.

Jsou extrémy globální?

(i) $x = -1$:

$$\begin{aligned} f \searrow \; \ldots \; (-\infty,-1) \Rightarrow f(y) \geq f(-1) \qquad \forall y \in (-\infty,-1) \\ f \nearrow \; \ldots \; \quad (-1,1) \quad \Rightarrow f(y) \geq f(-1) \qquad \forall y \in (-1,1) \end{aligned}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(y) \leq 0 \quad \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow f(y) \geq f(-1)$$

Tedy -1 je globální minimum.

(ii) $x = 1$:
Z lichosti: $x = 1$ je bod globálního maxima.

(8) Druhá derivace, konvexita:

$$\left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$
$f''(x)$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$
	$f'' < 0 \Rightarrow \cup$ (konk.)	$f'' > 0$ na $(-1,0) \Rightarrow \cap$ $f'' < 0$ na $(0,1) \Rightarrow \cup$	$f'' > 0 \Rightarrow \cap$ (konv.)

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$f''(\pm 1)$ neexistuje, neboť $f'(\pm 1)$ neexistuje.

(9) Inflexní body:
Buď $f'' \nexists$ nebo $f''(x) = 0$.
$f'' \nexists$: $x = \pm 1$ — bod inflexe není, neboť $\nexists f'$. $f''(x) = 0$: $x = 0$ — kandidát na inflexi.

$$\left.\begin{aligned} f'' > 0 \; \ldots \; \mathcal{P}^-(0,\delta) \\ f'' < 0 \; \ldots \; \mathcal{P}^+(0,\delta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ je inflexním bodem.}$$

Jiné inflexní body f nemá (nutná podmínka jinde nesplněna).

(10) Asymptoty:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin(\frac{2x}{1+x^2})}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 0x) = 0$$

$$a = b = 0$$

Nulová přímka, tedy osa x.

(11) Obor hodnot:

$$H(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{\pi}{2} \ \dots \ \text{globální minimum,} \ -\frac{\pi}{2} = f(-1)$$

$$\frac{\pi}{2} \ \dots \ \text{globální maximum,} \ \frac{\pi}{2} = f(1)$$

$$\overset{\text{Darboux}}{\Rightarrow} f \text{ nabývá každé mezihodnoty}$$

Taylorův polynom

Opakování

Polynom je každá funkce tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ pevné — koeficienty. $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Poznámky:

(i) Všechny polynomy jsou definovány a spojité na $\mathbb{R}$.

(ii) Jestliže $a_n \neq 0$, pak $n =$ stupeň polynomu.

(iii) Je-li $\mathcal{P}$ polynom, stupeň $\mathcal{P} = n$, pokud $\mathcal{P}'$ je polynom, stupeň $\mathcal{P}' = n - 1$.

Příklady:

$$\begin{aligned}
&\deg \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P} \text{ konstantní },\ \mathcal{P}(x) \equiv a_0 \\
&\deg \mathcal{P} = 1 \Rightarrow \mathcal{P}(x) = a_0 x + a_0 \text{ lineární} \\
&\deg \mathcal{P} = 2 \Rightarrow \text{ kvadratická funkce, atd.}
\end{aligned}$$

Motivace

Aproximace funkcí pomocí polynomů.
Mějme f, $a \in \mathbb{R}$, $\exists\, f'(a) \in \mathbb{R}$. Tečna $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Potom

$$\begin{aligned}
f(a) &= t(a) \\
f'(a) &= t'(a)
\end{aligned}$$

Navíc

$$\lim_{x \to a} (f(x) - t(x)) = 0 \text{ (triviální), ale i}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to a} (f'(x) - t'(x)) = 0 \text{ (aproximace je lepší než lineární)}$$

Chceme aproximace vyšších řádů.

Idea

Mějme f, $a \in \mathbb{R}$, $\exists\, f'(a) \in \mathbb{R}$. Chceme funkci f aproximovat polynomem v bodě a.

Aproximace polynomem stupně 1

$$P_1(x) = \alpha x + \beta$$

Polynom by měl procházet bodem a:

$$P_1(a) = f(a) \Rightarrow P_1(x) = c(x - a) + f(a)$$

(tedy hodnota funkce a aproximujícího polynomu splývají).
Zároveň chci:

$$P_1'(a) = f'(a) \Rightarrow P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Nejlepší aproximace polynomem stupně ≤ 1 je totiž **tečna** $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0$$

Ukazuje se, že tyto dva požadavky jsou ekvivalentní.

Aproximace polynomem stupně 2

Příklad: $\cos x$ — lineární aproximace nic moc, kvadratická aproximace je už lepší. $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c(x-a)^2$, $c =?$.

Chci:

$$\begin{matrix} P_2(a) = f(a) \\ P_2'(a) = f'(a) \end{matrix} \wedge P_2''(a) = f''(a)$$

$$\Rightarrow P_2'(x) = f'(a) + 2c(x-a) \Rightarrow P_2'(a) = f'(a)$$

(první derivace splývá)

$$\Rightarrow P_2''(x) = 2c \Rightarrow c = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

To je nejlepší kvadratická aproximace f v bodě a.

Navíc platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

(Důkaz: ⟨cvičení⟩)

Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak funkci

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce** f **řádu** n **v bodě** a.

Poznámky:

(i) $T_n^{f,a}$ je polynom, $\deg T_n^{f,a} \leq n$.

(ii) Příklad: $f(x) = \sin x$, $a = 0$, potom:

$$\begin{aligned} T_1^{\sin,0}(x) &= x \\ T_2^{\sin,0}(x) &= x \qquad \textit{(neboť } \sin''(0) = 0\textit{)} \\ T_3^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{6} \qquad \textit{(cvičení)} \\ T_4^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Poučení: $\deg T_n^{f,a}$ nemusí být roven n.

(iii) Derivace Taylorova polynomu:

$$\left(T_n^{f,a}\right)'(x) = 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2}(x-a)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}$$

Tedy $\left(T_n^{f,a}\right)'(x) = T_{n-1}^{f',a}$. (!)

(iv) Splývání polynomu a funkce:

$$\left.\begin{aligned} T_n^{f,a}(a) &= f(a) \\ \left(T_n^{f,a}\right)'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ \left(T_n^{f,a}\right)^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}\right\} (n+1) \text{ požadavků.}$$

Otázka

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{?}{=} 0$$

VĚTA 33 (o aproximaci funkce Taylorovým polynomem):

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Nechť $\mathcal{P}$ je polynom, $\deg \mathcal{P} \leq n$. Pak platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-\mathcal{P}(x)}{(x-a)^n} = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{P} = T_n^{f,a}$$

Poznámka:

"$\Leftarrow$"

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

(odpověď na otázku je kladná)

"$\Rightarrow$"

Tuto vlastnost má mezi polynomy stupně $\leq n$ jen Taylorův.

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

Indukcí:

$(n = 1)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_1^{f,a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

$(n-1 \rightsquigarrow n)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{L'H } \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-\left(T_n^{f,a}\right)'(x)}{n(x-a)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0 \;\; \textit{(dle indukčního předp.)}$$

"⇒"

(1. krok)

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-f(x)}{(x-a)^n}}_{0\ \textit{(předp.)}}+\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{0\ \textit{(právě dok.)}}$$

LEMMA:
Q polynom, $\deg Q\le n$, $a\in\mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

pak $Q\equiv 0$.

DŮKAZ:
Indukcí:

(1) $n=1$:
Q je lineární, $Q(a)=0$ (viz níže) $\Rightarrow Q(x)=c(x-a)$, $c\in\mathbb{R}$.
Víme:

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{x-a}=0$$
$$\Rightarrow 0=\lim_{x\to a}\frac{c(x-a)}{x-a}=c\Rightarrow c=0\Rightarrow Q(x)\equiv 0$$

(2) $n-1\rightsquigarrow n$:

$$\left.\begin{aligned}\deg Q\le n\\ \lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow Q(a)=0$$

$$\Rightarrow\ a \text{ je kořen polynomu } Q$$

$$\Rightarrow Q(x)=(x-a)R(x),\ R \text{ je polynom, } \deg R\le n-1$$

Potom

$$0=\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

$$\overset{\text{ind. předp.}}{\Longrightarrow} R\equiv 0\Rightarrow Q(x)=(x-a)\cdot 0\Rightarrow Q\equiv 0$$

Q.E.D. (důkaz lemmatu)

(2. krok)

Víme:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

$(\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)$ je polynom, deg $\leq n)$

$$\overset{\text{lemma}}{\Longrightarrow}\ \mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)\equiv 0 \Rightarrow \mathcal{P}=T_n^{f,a}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$\left.\begin{array}{l} f=\sin \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

(plyne z implikace "$\Leftarrow$")

VĚTA 34 (obecný tvar zbytku):

Nechť f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$, $a,x\in\mathbb{R}$, $x>a$.
Nechť φ je spojitá funkce na $[a,x]$, která má na (a,x) vlastní a nenulovou derivaci.
Pak existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že

$$R_n^{f,a}(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

(obrázek)

Důsledek 1 (Lagrangeův tvar zbytku):

$$R_n^{f,a}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\qquad(\exists\,\xi\in(a,x))$$

DŮKAZ:

Volím $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$. $\langle$cvičení$\rangle$

Důsledek 2 (Cauchyův tvar zbytku):

$$R_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)\qquad(\exists\,\xi\in(a,x))$$

DŮKAZ:

Volím $\varphi(t)=t$. $\langle$cvičení$\rangle$

DŮKAZ:

Pro $t\in[a,x]$ definujeme

$$F(t):=f(x)-T_n^{f,t}(x)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Potom:

(i) F je spojitá na $[a,x]$ a má vlastní derivaci na (a,x).

(ii) $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = R_n^{f,a}(x)$

(iii) $F(x) = 0$

(iv) φ je spojitá, $\exists\, \varphi' \neq 0$ vlastní na (a,x)

Tedy podle V.23- (Cauchy o střední hodnotě):

$$\exists\, \xi \in (a,x) : \qquad \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Přitom:

$$F'(t) = -\left(f'(t) + f''(t)(x-t) + f'(t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}2(x-t)(-1) + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

$$\overset{\text{požírání}}{\Longrightarrow} F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad \forall t \in (a,x)$$

$$\Rightarrow F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Platí tedy:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} & = & \dfrac{0 - R_n^{f,a}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} \\ = & & = \\ \dfrac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} & = & \dfrac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)} \end{array}$$

To znamená:

$$R_n^{f,a}(n) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

Q.E.D.

Pozn.: V.32- platí i pro $x < a$.

Příklad:

Rozvoj funkce e^x:

$$f'(x) = e^x,\ f(x) = e^x, \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x$$

$$a = 0 \Rightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 1$$

Zaveďme si:

$$T_n^{\exp,0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

Pak:

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n^{\exp,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + e\frac{\xi n}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Pro každé pevné x je $\xi n \in (a,x) \quad \forall n \in N$, tedy $e^{\xi n} \leq e^x$. Tudíž

$$|R_n^{\exp,0}(x)| \leq \frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty} |R_n^{\exp,0}(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = e^x \Rightarrow e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Důsledek:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

a speciálně pro $x = 1$:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Chceme-li spočítat e s přesností $0,001$:

$$e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+j)!} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Tedy:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(na přenost $0,001$ stačí $n = 6$)

Důkaz iracionality e

Nechť $e = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Potom pro

$$m = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$$

máme

$$m < \frac{p}{q} < m + \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$qmn! < pn! < qmn! + \frac{q}{n}$$

Nyní stačí zvolit $n > q$.
$\not\sharp$ *Spor*

Rozvoj funkce sin

Mějme sin, $a = 0$:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) & \sin'(0) &= 1 \\ \sin''(x) &= -\sin(x) & \sin''(0) &= 0 \\ \sin'''(x) &= -\cos(x) & \sin'''(0) &= -1 \\ \sin''''(x) &= \sin(x) & \sin''''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^{\sin,0}_{2n+1}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$R^{\sin,0}_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\xi n) \cdot x^{2n+2}$$

$$|R^{\sin,0}_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \qquad \forall x,\ n \to \infty$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Obdobně

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Rozvoj funkce log(x+1)

Mějme $f(x)\colon y = \log(x+1)$. Pro $x = 0$ pak $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (-1)^{n+1}$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Rightarrow T^{\log(x+1),0}_{n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} (-1)^{j-1} (j-1)! \cdot x^j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}$$

$$R^{\log(x+1),0}_{n}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n(1+\xi)^{n+1}}$$

To nelze odhadnout pro $|x| \geq 1$, pro $|x| < 1$ ano:

$$\Rightarrow \log(x+1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}, \qquad x \in (-1, 1]$$

Definice:

Řekneme, že funkce f je v bodě a zprava **malá řádu** n, jestliže

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Píšeme

$$f(x) = \sigma\left((x-a)^n\right), \qquad x \to a_+$$

(Laudaův symbol).

Pozor: Jde pouze o symboliku, *neplatí* žadná rovnost!

Příklady:

(i) $e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \sigma(x^n), \quad x \to 0_+$

(ii) $x - \sin x = \sigma(x^2), \quad x \to 0$

(iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \sigma(x^3), \quad x \to 0$

Příklad:

Mějme sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$$

Pro která p konverguje?

Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\sigma\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1\right) =$$

$$= p - \frac{1}{2} - 1 + \underbrace{\sigma\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0},$$

tedy konverguje pro $p > \frac{3}{2}$.