Limesy

Mějme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definujme posloupnosti $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$b_k = \sup\{a_n : n \geq k,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$c_k = \inf\{a_n : n \geq k,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování:

$$c_k \leq a_k \leq b_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ je } \textbf{nerostoucí} \ \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} b_k$$

$$\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ je } \textbf{neklesající} \ \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} c_k$$

Limes superior

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} b_k & \lim b_k \in \mathbb{R} \\ +\infty & \{a_n\} \text{ je shora neomezená} \end{cases}$$

Limes inferior

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} c_k & \lim c_k \in \mathbb{R} \\ -\infty & \{a_n\} \text{ je zdola neomezená} \end{cases}$$

Příklad:

(i) $a_n = (-1)^n$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$

(ii) $a_n = 1/n^2$, $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n = 0$

Poznámky:

(i) Narozdíl od limity, která nemusí existovat, $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$ existují vždy.

(ii) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

VĚTA 10 (o vztahu limity, suprema a limes inferior):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$$

DŮKAZ:

“$\Leftarrow$”

Víme: $\forall k \in \mathbb{N}:\ c_k \leq a_k \leq b_k$

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} b_k = A \in \mathbb{R}^* \overset{\text{2 policajti}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} a_k = A$$

"⇒"

(i) Nechť $A \in \mathbb{R}$:
Zvol $\varepsilon > 0$. Potom $\exists\, n_0$ takové, že $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq a_n \leq A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon \leq c_n \leq a_n \leq b_n \leq A + \varepsilon$$

$$0 \leq b_n - c_n \leq 2\varepsilon \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

(ii) Nechť $A = +\infty$:
Pak $\{a_n\}$ je shora neomezená.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Zvolíme $K \in \mathbb{R}$. Pak $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 :\ a_n > K$.

$$\inf_{n \geq n_0} \{a_n\} \geq K \Rightarrow c_{n_0} \geq K$$

Protože $\{c_k\}$ je neklesající, máme $\forall n \geq n_0 :\ c_n \geq K$.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$$

(iii) Nechť $A = -\infty$: analogicky.

Cvičení:

Dokažte:

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf (a_n + b_n) \leq \limsup (a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$