Definice

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je libovolná konečná množina (obecněji zcela libovolná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Úplný graf (na n vrcholech):

$$K_n = (V, \binom{V}{2})$$

Kružnice:

$$C_n = (\{v_1, \ldots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}) \qquad n \geq 3$$

Cesta:

$$P_n = (\{v_0, \ldots, v_n\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\})$$

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. (Cesta je tedy speciální druh sledu, kde jedním vrcholem neprojdeme vícekrát.)

Úplný bipartitní graf $K_{n,m} = (V, E)$

$$V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$$
$$E = \{\{u_i, v_j\}: \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m\}$$
$$|V| = n + m, \ |E| = n \cdot m$$

Příklad:

$K_{2,3}$:

```
*-\ * /-*
 \ X X /
  *-^-*
```

Bipartitní graf

Graf $G = (V, E)$ takový, že:

$$V = \underbrace{U \dot\cup W}_{\substack{V = U \cup W, \\ U \cap W = 0}}$$
$$E \subseteq \{\{u, w\}: \ u \in U, \ w \in W\}$$

Isomorfismus

"Přejmenování vrcholů"

$G \mid G'$ (G, G' jsou **izomorfní**), pokud existuje bijekce $f\colon V(G) \xleftrightarrow{1\text{–}1} V(G')$ taková, že:

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G')$$

Pozn.: Izomorfismus je ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní).

Podgraf: Graf G' je **podgrafem** grafu G ($G' \subseteq G$), pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Indukovaný podgraf

Graf G' je **indukovaným podgrafem** grafu G, pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') = E(G) \cap \binom{V(G')}{2}$.

Pozorování

Graf G na n vrcholech má 2^n indukovaných podgrafů (každá podmnožina V **indukuje** indukovaný podgraf).

Souvislý graf

Graf G je **souvislý**, pokud $\forall x, y \in V(G)$ existuje v G cesta z x do y: $x \sim_G y$. $\sim_G$ je ekvivalence na množině $V(G)$.

DŮKAZ:

Reflexivita a symetrie je zřejmá.
Tranzitivita:

$$x \sim_G y \wedge y \sim_G z \Rightarrow \exists \text{ sled z } x \text{ do } z$$

Nejkratší sled z x do z je cesta $\Rightarrow x \sim_G z$.
Q.E.D.

Poznámka:

$$G \text{ souvislý } \Leftrightarrow \forall x, y \in V(G)\ \exists \text{ sled z } x \text{ do } y \text{ (v } G\text{)}$$

Komponenta grafu G

Podgraf indukovaný třídami ekvivalence $\sim_G$.
Pozn.: G souvislý $\Leftrightarrow$ má jednu komponentu.

Vzdálenost v grafu

$$x, y \in V(G),\ d_G(x, y) = \text{ vzdálenost } x,\ y \text{ v } G\ = \text{ délka nejkratší cesty z } x \text{ do } y$$

Poznámka:

$d_G(x, y)$ má vlastnosti metriky (vzdálenosti):

$$d_G(x, y) \geq 0$$
$$d_G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$d_G(x, y) = d_G(y, x)$$
$$d_G(x, y) + d_G(y, z) \geq d_G(x, z)$$

Sousedi v grafu: y je soused x v G, pokud $\{x, y\} \in E(G)$ ($\Leftrightarrow d_G(x, y) = 1$).
Matice sousednosti:

$$G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E):\ A_G = (a_{i,j})_{i,j=1}^n,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stupeň vrcholu: Stupeň vrcholu x v G jest $\deg_G(x) = \deg(x) =$ počet hran obsahujících $x =$ počet sousedů.